France

[illegible]

USA

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE,

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR M. L. PASTEUR,

MEMBRE DE L'INSTITUT,

AVEC

UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

TOME CINQUIÈME — ANNÉE 1868.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1868

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS L'AIR,

PAR M. PAUL GAUTIER,
PROFESSEUR AU LYCÉE D'ALGER.

1. L'étude du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant date de l'origine du Calcul infinitésimal. Newton et Wallis ont donné les premiers travaux sur ce sujet en 1687.

Les recherches de Newton se trouvent dans le second livre des *Principes*, et celles de Wallis dans les *Transactions philosophiques*. Deux ans plus tard, Leibnitz publia un Mémoire sur le même sujet dans les *Acta eruditorum*.

Jean Bernoulli fut provoqué par Keill à déterminer le mouvement d'un projectile dans un milieu homogène, lorsque la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Il résolut le problème plus général où la résistance est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse. Ses recherches furent publiées, ainsi que celles de son neveu Nicolas Bernoulli, dans les *Acta eruditorum*, 1719, p. 216. Plus tard, Legendre ramena aux quadratures la détermination du mouvement d'un projectile quand la résistance est égale à une constante, plus un terme proportionnel au carré de la vitesse (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1782).

On peut encore consulter sur le problème balistique : Euler (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1753), Borda (*ibid.*, 1769), Templehoff (*ibid.*, 1788-1789), Moreau (*Journal de l'École Polytechnique*, XI^e cahier).

Ces indications ont été puisées dans les *Problèmes de Mécanique rationnelle* de M. l'abbé Jullien.

Dans tous ces travaux, le projectile est toujours considéré comme un point matériel, et la résistance du milieu comme une force dirigée suivant la tangente à la trajectoire, et en sens contraire du mouvement.

Poisson a publié (*Journal de l'École Polytechnique*, 1838-1839) un Mémoire très-développé sur le mouvement d'un projectile dans un milieu résistant, en tenant compte de la forme du projectile et en admettant que la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Mais il s'est borné au cas où le projectile diffère très-peu d'une sphère.

Je me propose de reprendre cette question pour un projectile quelconque de révolution, et en adoptant d'autres lois que celles que Poisson a admises.

Le tir des canons rayés donne de l'intérêt à cette étude. On a reconnu, en effet, que les projectiles animés d'une vitesse de rotation autour de leur axe de figure éprouvaient une déviation latérale, qu'en termes d'artillerie on nomme *dérivation*. Cette dérivation est assez considérable pour qu'il ait fallu en tenir compte dans le tir. Il est évident que si la résistance de l'air pouvait être représentée par une force appliquée au centre de gravité et tangente à la trajectoire de ce point, cet effet ne se produirait pas.

2. Quand un corps se déplace, les éléments de sa surface n'agissent pas de la même manière sur l'air qui les touche. La surface doit être considérée comme partagée en deux régions, l'une qui sort de l'espace actuellement occupé par le corps et l'autre qui pénètre dans cet espace. La ligne de séparation de ces deux régions est l'intersection de la surface du corps dans la position qu'il occupe actuellement avec cette même surface pour la position infiniment voisine que le corps prend après. Les éléments de surface appartenant à la première région compriment l'air; ils supportent donc la pression ordinaire de l'air et en outre une résistance normale dirigée de dehors en dedans, et dont la grandeur dépend de la compression éprouvée par l'air. Les éléments de la deuxième région se trouvent en contact avec un air dilaté; ils supportent alors une pression moindre que la pression atmosphérique ordinaire. On peut dire qu'ils supportent une pression égale à la pression

ordinaire, à la condition de leur appliquer une force normale de sens contraire, c'est-à-dire dirigée de dedans en dehors, et dont la grandeur dépend de la dilatation de l'air. Enfin, dans chaque région, les résistances élémentaires ne sont pas égales, parce que, les vitesses de ces éléments n'étant pas égales, la compression ou la dilatation de l'air n'est pas la même. Cette compression ou cette dilatation ne dépendant que de la vitesse normale de l'élément, j'admettrai que la résistance élémentaire de l'air est proportionnelle à une certaine puissance de la vitesse normale de l'élément sur lequel il agit. J'admettrai en outre qu'à égalité de vitesse normale, les résistances élémentaires appliquées aux éléments des deux régions sont les mêmes. Cela revient à dire que lorsque l'air éprouve un même changement de volume en plus ou en moins, la pression qu'il exerce sur l'élément qu'il touche est changée de la même quantité.

Les pressions ordinaires appliquées aux éléments de la surface se composent en une seule force qui est la poussée de l'air.

C'est une force verticale dirigée de bas en haut, égale au poids de l'air déplacé et dont le point d'application est le centre de gravité du corps considéré comme homogène. Les résistances élémentaires peuvent être remplacées par deux forces seulement dont l'une passe par le centre de gravité réel du corps.

Il est aisé maintenant de comprendre qu'un projectile de révolution, animé d'une vitesse initiale dirigée suivant son axe de figure et d'une rotation initiale autour du même axe, peut éprouver une dérivation.

Au commencement du mouvement, le plan vertical qui contient l'axe est un plan de symétrie, et les forces élémentaires peuvent être remplacées par deux forces contenues dans ce plan, ayant pour points d'application, la première le centre de gravité, et la seconde un certain point de l'axe. Le projectile se trouve dès lors dans les mêmes conditions qu'une toupie qui se meut sur un plan horizontal poli. On sait que l'axe de la toupie tourne autour de la verticale menée par le centre de gravité. Il en sera de même de l'axe du projectile; il sortira donc du plan vertical qui le contenait d'abord.

Dès lors, le plan vertical qui d'abord contenait l'axe n'étant plus un plan de symétrie pour la surface du solide, il n'y a plus de raison pour que les deux forces qui peuvent remplacer les résistances élémentaires

soient contenues dans ce plan. Transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, elles se composeront en une seule force qui conjointement avec le poids détermine le mouvement de ce point. On pourra décomposer cette force en deux autres, l'une située dans le plan vertical initial, et l'autre perpendiculaire à ce plan. Cette dernière déterminera la dérivation du projectile.

Ces considérations suffisent pour faire comprendre la possibilité d'une dérivation, mais non pour en déterminer la grandeur et le sens. Il faut, pour cela, se donner une loi de résistance. Dans une première Partie, je supposerai la résistance élémentaire proportionnelle à la vitesse normale, et dans une deuxième Partie je la supposerai proportionnelle au cube de la vitesse normale.

PREMIÈRE PARTIE.

RÉSISTANCE PROPORTIONNELLE A LA VITESSE.

1. Je suppose un projectile de révolution dont le centre de gravité est animé d'une vitesse initiale v_0 dirigée suivant son axe de figure, et qui possède en outre une vitesse initiale de rotation ω autour du même axe. J'appellerai α l'angle initial que cet axe fait avec l'horizon.

Ce projectile est supposé homogène; mais il peut être creux. Dans ce cas, je supposerai la cavité de révolution autour du même axe que le projectile. Il résulte de là que le centre de gravité réel du corps est situé sur l'axe de révolution, de même que le centre de poussée; mais ces deux points peuvent ne pas coïncider. Il en résulte aussi que les deux rayons principaux de giration perpendiculaires à l'axe, menés par le centre de gravité, sont égaux entre eux.

Je rapporterai les positions successives du centre de gravité à trois axes fixes Ox, Oy, Oz, menés par sa position initiale. Je prendrai pour axes des x et des z l'horizontale et la verticale contenues dans le plan vertical qui contient l'axe au commencement du mouvement, les z positifs de bas en haut, les x positifs dans le sens du mouvement.

Pour axe des y, je prendrai l'horizontale perpendiculaire au plan zOx, et comptée positivement vers la droite d'un observateur placé sur l'axe des z et tourné vers l'axe des x.

Je rapporterai les points de la surface aux trois axes permanents d'inertie Gx', Gy', Gz', menés par le centre de gravité G.

L'axe de révolution est le premier d'entre eux; les deux autres peuvent être choisis arbitrairement dans le plan perpendiculaire à l'axe de figure. Je prendrai pour Gy' la droite qui coïncide avec Oy au commencement du mouvement; alors Gz' sera la droite perpendiculaire au plan $x'Gy'$, et qui coïncide avec Oz quand les axes Gx' et Gy' coïncident avec Ox et Oy.

Cela posé, soient, à l'époque t, x, y, z les coordonnées du centre de gravité; p, q, r les vitesses de rotation du solide autour des axes permanents d'inertie, ces vitesses pouvant être positives ou négatives conformément aux conventions en usage dans les Traités de Mécanique rationnelle. Soient $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$ les cosinus des angles que les axes mobiles font alors avec les axes fixes; F_x, F_y, F_z les sommes des composantes des forces extérieures parallèles aux axes fixes; M_x, M_y, M_z les sommes des moments des mêmes forces par rapport aux axes d'inertie; soient enfin M la masse du solide, l et l' les deux rayons de giration. Les équations qui définissent le mouvement seront :

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad M\frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad M\frac{d^2z}{dt^2} = F_z;$$

$$Ml^2\frac{dp}{dt} = M_x,$$

$$Ml'^2\frac{dq}{dt} = M(l'^2 - l^2)pr + M_y,$$

$$Ml'^2\frac{dr}{dt} = -M(l'^2 - l^2)pq + M_z;$$

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \quad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q;$$

$$\frac{db}{dt} = cp - ar, \quad \frac{db'}{dt} = c'p - a'r, \quad \frac{db''}{dt} = c''p - a''r;$$

$$\frac{dc}{dt} = aq - bp, \quad \frac{dc'}{dt} = a'q - b'p, \quad \frac{dc''}{dt} = a''q - b''p.$$

Cela fait quinze équations et quinze inconnues.

Les valeurs initiales de ces inconnues sont, d'après ce qui précède,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \qquad p = \omega, \quad q = 0, \quad r = 0;$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \qquad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha;$$

$$a = \cos\alpha, \qquad a' = 0, \quad a'' = \sin\alpha;$$

$$b = 0, \qquad b' = 1, \quad b'' = 0;$$

$$c = -\sin\alpha, \qquad c' = 0, \quad c'' = \cos\alpha.$$

2. Il faut déterminer les quantités F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z. Soient x', y', z' les coordonnées d'un point m de la surface; ds l'étendue de l'élément infiniment petit de surface auquel ce point appartient; X, Y, Z les cosinus des angles que la normale à cet élément dirigée de dedans en dehors fait avec les axes permanents d'inertie; u, u', u'' les vitesses du centre de gravité estimées sur des droites fixes, coïncidant, à l'époque t avec les axes d'inertie.

Les vitesses du point m, estimées suivant ces droites, seront

$$u + qz' - ry', \quad u' + rx' - pz', \quad u'' + py' - qx'.$$

Si l'on appelle V la vitesse normale du point m, on aura

$$V = (u + qz' - ry')X + (u' + rx' - pz')Y + (u'' + py' - qx')Z.$$

La résistance élémentaire appliquée à l'élément dont le point m fait partie sera, d'après la loi adoptée, $kV\,ds$ en valeur absolue. Je peux remplacer k par εM, M étant la masse du solide et ε un coefficient constant. La valeur absolue de la résistance élémentaire est donc $\varepsilon MV\,ds$.

Je suppose d'abord que le point m appartienne à la première région de la surface, c'est-à-dire que, par suite du déplacement du solide, ce point sorte de l'espace occupé par le corps à l'époque t. Alors la direction de la vitesse du point m fait un angle aigu avec la direction de la normale extérieure. Or le cosinus de cet angle a le même signe que V, et, puisque cet angle est aigu, V est positif. La résistance élémentaire est dirigée suivant la normale intérieure; ses composantes sur les axes

d'inertie seront donc

$$-\varepsilon MVX\,ds,\quad -\varepsilon MVY\,ds,\quad -\varepsilon MVZ\,ds.$$

Je suppose en second lieu que le point m appartienne à la seconde région, c'est-à-dire que ce point pénètre dans l'espace actuellement occupé par le corps ; alors la direction de la vitesse du point m fait un angle obtus avec la direction de la normale extérieure. Il en résulte que V est négatif; la valeur de la résistance élémentaire est alors $-\varepsilon MV\,ds$ en valeur absolue ; mais cette résistance est alors dirigée suivant la normale extérieure ; ses composantes sur les trois axes seront comme précédemment

$$-\varepsilon MVX\,ds,\quad -\varepsilon MVY\,ds,\quad -\varepsilon MVZ\,ds.$$

Les moments de ces composantes, par rapport aux mêmes droites, sont dès lors

$$-\varepsilon MV(Zy'-Yz')\,ds,\quad -\varepsilon MV(Xz'-Zx')\,ds,\quad -\varepsilon MV(Yx'-Xy')\,ds.$$

Les sommes des composantes sur les axes d'inertie sont donc

$$-\varepsilon M\Sigma VX\,ds,\quad -\varepsilon M\Sigma VY\,ds,\quad -\varepsilon M\Sigma VZ\,ds,$$

et les sommes des moments

$$-\varepsilon M\Sigma V(Zy'-Yz')\,ds,\quad -\varepsilon M\Sigma V(Xz'-Zx')\,ds,\quad -\varepsilon M\Sigma V(Yx'-Xy')\,ds,$$

les sommes se rapportant à toute la surface du projectile.

Les sommes des composantes des forces résistantes sur les trois axes fixes passant par l'origine sont

$$-\varepsilon M(a\ \Sigma VX\,ds + b\ \Sigma VY\,ds + c\ \Sigma VZ\,ds),$$
$$-\varepsilon M(a'\ \Sigma VX\,ds + b'\ \Sigma VY\,ds + c'\ \Sigma VZ\,ds),$$
$$-\varepsilon M(a''\Sigma VX\,ds + b''\Sigma VY\,ds + c''\Sigma VZ\,ds).$$

Outre les forces résistantes, il y a encore à considérer le poids du corps et la poussée de l'air. Soient P le poids du corps et ϖ celui de l'air déplacé, $-P+\varpi$ sera la somme des composantes sur l'axe des Z ; on peut écrire $-P\left(1-\frac{\varpi}{P}\right)$ ou bien $-Mg$, g représentant dès lors

l'accélération due au poids du corps dans l'air. Les composantes de ces forces sur les axes des x et des y sont nulles. Le poids du corps étant une force passant par le centre de gravité, ses moments par rapport aux axes d'inertie sont nuls, mais il n'en est pas de même de la poussée. Soit d la distance du centre de poussée au centre de gravité, d pouvant être positif ou négatif. Les composantes de la poussée sur les trois axes d'inertie sont

$$\varpi a'', \quad \varpi b'', \quad \varpi c'',$$

et les coordonnées de son point d'application

$$d, \quad o, \quad o.$$

Les moments par rapport aux axes d'inertie sont donc

$$o, \quad -\varpi d c'', \quad +\varpi d b'',$$

ou bien, en posant $\varpi d = M\mu$,

$$o, \quad -M\mu c'', \quad +M\mu b''.$$

3. *Détermination des intégrales doubles.* — La valeur de V peut s'écrire, en développant,

$$V = uX + u'Y + u''Z + q(Xz' - Zx') + r(Yx' - Xy').$$

p n'y figure pas, parce que, la surface étant de révolution, on a en chaque point $Zy' - Yz' = o$.

Pour avoir les intégrales cherchées, il faut multiplier cette expression successivement par

$$X ds, \quad Y ds, \quad Z ds, \quad (Xz' - Zx')ds, \quad (Yx' - Xy')ds,$$

et intégrer sur toute la surface.

Je remarquerai qu'une intégrale dont l'élément est de degré impair par rapport à Y et y' ou bien par rapport à Z et z' est nulle. En effet, la surface étant de révolution autour de l'axe des x', les éléments sont deux à deux symétriques par rapport aux plans $z'ox'$ et $y'ox'$. Les valeurs de Y et y' ou bien de Z et z' qui correspondent à des éléments

symétriques sont égales et de signes contraires; dès lors l'intégrale étant la somme d'éléments deux à deux égaux et de signes contraires est nulle. On obtient, en tenant compte de cette remarque,

$$\Sigma VX\,ds = u\Sigma X^2 ds,$$
$$\Sigma VY\,ds = u'\Sigma Y^2 ds + r\Sigma Y(Yx' - Xy')ds,$$
$$\Sigma VZ\,ds = u''\Sigma Z^2 ds + q\Sigma Z(Xz' - Zx')ds;$$

$$\Sigma V(Xz' - Zx')ds = u''\Sigma Z(Xz' - Zx')ds + q\Sigma(Xz' - Zx')^2 ds,$$
$$\Sigma V(Yx' - Xy')ds = u'\Sigma Y(Yx' - Xy')ds + r\Sigma(Yx' - Xy')^2 ds.$$

Je remarquerai maintenant que deux intégrales dont les éléments ne diffèrent que par le changement de Y et y' en Z et z', et réciproquement, sont égales. Cela résulte de ce que, la surface étant de révolution, rien ne distingue les axes des y et des z.

Je pose

$$\Sigma X^2 ds = A, \quad \Sigma Y^2 ds = B, \quad \Sigma Y(Yx' - Xy')ds = C, \quad \Sigma(Xz' - Zx')^2 ds = D.$$

A, B, C, D sont des coefficients constants dont la valeur dépend de la forme du projectile, et qu'on pourra calculer quand on se donnera la section méridienne. Il vient alors

$$\Sigma VX\,ds = Au, \quad \Sigma VY\,ds = Bu' + Cr, \quad \Sigma VZ\,ds = Bu'' - Cq,$$
$$\Sigma V(Xz' - Zx')ds = -Cu'' + Dq, \quad \Sigma V(Yx' - Xy')ds = Cu' + Dr.$$

Les quantités u, u', u'' qui entrent dans ces équations ont pour valeurs

$$u = a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt},$$
$$u' = b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt},$$
$$u'' = c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}.$$

Les équations du mouvement sont maintenant connues.

Les moments des forces par rapport à l'axe d'inertie Gx' étant nuls, il en résulte que p reste constant; il garde donc sa valeur initiale ω. Il n'y a donc plus que quatorze équations et autant d'inconnues.

Ces équations sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varepsilon[a\,\mathrm{A}u + b(\mathrm{B}u' + \mathrm{C}r) + c(\mathrm{B}u'' - \mathrm{C}q)],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\varepsilon[a'\,\mathrm{A}u + b'(\mathrm{B}u' + \mathrm{C}r) + c'(\mathrm{B}u'' - \mathrm{C}q)],$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \varepsilon[a''\,\mathrm{A}u + b''(\mathrm{B}u' + \mathrm{C}r) + c''(\mathrm{B}u'' - \mathrm{C}q)];$$

$$l'^2\frac{dq}{dt} = (l'^2 - l^2)\omega r - \mu c'' - \varepsilon(-\mathrm{C}u'' + \mathrm{D}q),$$

$$l'^2\frac{dr}{dt} = -(l'^2 - l^2)\omega q + \mu b'' - \varepsilon(\mathrm{C}u' + \mathrm{D}r);$$

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \qquad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \qquad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q,$$

$$\frac{db}{dt} = \omega c - ar, \qquad \frac{db'}{dt} = \omega c' - a'r, \qquad \frac{db''}{dt} = \omega c'' - a''r,$$

$$\frac{dc}{dt} = -\omega b + aq, \qquad \frac{dc'}{dt} = -\omega b' + a'q, \qquad \frac{dc''}{dt} = -\omega b'' + a''q.$$

4. Pour connaitre les circonstances du mouvement, il faut intégrer les quatorze équations simultanées qui précèdent. On connaitra alors à chaque instant la position du centre de gravité et la direction de l'axe de figure. Cela ne peut se faire exactement, mais on peut avoir des valeurs approchées des inconnues, dans le cas où les termes qui contiennent ε et μ en facteurs sont très-petits *par rapport à g*. En effet, les inconnues sont alors développables en séries rapidement convergentes par rapport aux puissances croissantes de ε et μ. Si l'on peut calculer les premiers termes de ces séries, on aura des valeurs suffisamment approchées des inconnues.

Ainsi, je suppose ε et μ très-petits, et je me propose de déterminer le mouvement de rotation du solide autour de son centre de gravité en négligeant les puissances de ε et μ supérieures à la première, et cela me permettra d'avoir x, y, z en ne négligeant que les puissances de ε et μ supérieures à la seconde. On obtient une première approximation en remplaçant ε et μ par zéro dans les équations du mouvement. Les valeurs obtenues pour les inconnues par l'intégration des équations ainsi for-

mées sont les termes indépendants de ε et μ dans les séries précédemment indiquées. Elles correspondent au mouvement dans le vide.

Les équations différentielles deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-g,$$

$$l'^2\frac{dq}{dt}=(l'^2-l^2)\omega r,\quad l'^2\frac{dr}{dt}=-(l'^2-l^2)\omega q,$$

lesquelles donnent, en tenant compte des valeurs initiales,

$$x=v_0t\cos\alpha,\quad y=0,\quad z=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2,\quad q=0,\quad r=0.$$

Les équations aux cosinus sont alors

$$\frac{da}{dt}=0,\qquad \frac{da'}{dt}=0,\qquad \frac{da''}{dt}=0,$$

$$\frac{db}{dt}=\omega c,\qquad \frac{db'}{dt}=\omega c',\qquad \frac{db''}{dt}=\omega c'',$$

$$\frac{dc}{dt}=-\omega b,\qquad \frac{dc'}{dt}=-\omega b',\qquad \frac{dc''}{dt}=-\omega b''.$$

Intégrant et tenant compte des valeurs initiales, on obtient

$$\begin{array}{lll} a=\cos\alpha, & a'=0, & a''=\sin\alpha,\\ b=-\sin\alpha\sin\omega t, & b'=\cos\omega t, & b''=\cos\alpha\sin\omega t,\\ c=-\sin\alpha\cos\omega t, & c'=-\sin\omega t, & c''=\cos\alpha\cos\omega t, \end{array}$$

valeurs qui prouvent que l'axe du projectile se déplace parallèlement à lui-même. On aurait pu regarder ce résultat comme acquis, et en conclure géométriquement les valeurs qui précédent.

5. Je pose

$$x=v_0t\cos\alpha+x_1,\quad z=v_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2+z_1,$$

$$\begin{array}{lll} a=\cos\alpha+a_1, & & a''=\sin\alpha+a''_1,\\ b=-\sin\alpha\sin\omega t+b_1, & b'=\cos\omega t+b'_1, & b''=\cos\alpha\sin\omega t+b''_1,\\ c=-\sin\alpha\cos\omega t+c_1, & c'=-\sin\omega t+c'_1, & c''=\cos\alpha\cos\omega t+c''_1. \end{array}$$

Les variables $x_1, y, z_1, q, r; a_1, a', a''_1; b_1, b'_1, b''_1; c_1, c'_1, c''_1$, s'annulant en même temps que ε et μ, contiennent ces nombres en facteurs.

Les équations aux cosinus deviennent, par cette substitution,

$$\frac{da_1}{dt} = \sin\alpha(q\cos\omega t - r\sin\omega t), \quad \frac{da'}{dt} = q\sin\omega t + r\cos\omega t, \quad \frac{da''_1}{dt} = -\cos\alpha(q\cos\omega t - r\sin\omega t),$$
$$\frac{db_1}{dt} = \omega c_1 - r\cos\alpha, \quad \frac{db'_1}{dt} = \omega c'_1, \quad \frac{db''_1}{dt} = \omega c''_1 - r\sin\alpha,$$
$$\frac{dc_1}{dt} = -\omega b_1 + q\cos\alpha, \quad \frac{dc'_1}{dt} = -\omega b'_1, \quad \frac{dc''_1}{dt} = -\omega b''_1 + q\sin\alpha.$$

J'ai négligé dans ces équations les carrés des nouvelles variables, ce qui revient à négliger les carrés de ε et μ.

Les deux équations $\frac{db'_1}{dt} = \omega c'_1$, $\frac{dc'_1}{dt} = -\omega b'_1$ montrent qu'à l'approximation convenue on a

$$b'_1 = 0, \quad c'_1 = 0.$$

A la même approximation on a, d'après les équations en a_1 et a''_1, $\cos\alpha\frac{da_1}{dt} + \sin\alpha\frac{da''_1}{dt} = 0$, d'où l'on conclut

$$a_1 = -a''_1 . \operatorname{tang}\alpha.$$

6. Je considère maintenant les deux équations

$$\frac{db_1}{dt} = \omega c_1 - r\cos\alpha, \quad \frac{dc_1}{dt} = -\omega b_1 + q\cos\alpha.$$

Je pose

$$b_1 = \mathrm{M}\sin\omega t + \mathrm{M}'\cos\omega t, \quad c_1 = \mathrm{M}\cos\omega t - \mathrm{M}'\sin\omega t,$$

M et M′ étant deux nouvelles variables; on en déduit aisément

$$b_1\sin\omega t + c_1\cos\omega t = \mathrm{M}, \quad b_1\cos\omega t - c_1\sin\omega t = \mathrm{M}',$$

puis

$$\sin\omega t\frac{d\mathrm{M}}{dt} + \cos\omega t\frac{d\mathrm{M}'}{dt} = -r\cos\alpha, \quad \cos\omega t\frac{d\mathrm{M}}{dt} - \sin\omega t\frac{d\mathrm{M}'}{dt} = q\cos\alpha.$$

Cela donne

$$\frac{dM}{dt} = \cos\alpha(q\cos\omega t - r\sin\omega t) = -\frac{da''}{dt}, \qquad \text{d'où} \quad M = -a''_1,$$

$$\frac{dM'}{dt} = -\cos\alpha(q\sin\omega t + r\cos\omega t) = -\cos\alpha\cdot\frac{da'}{dt}, \quad \text{d'où} \quad M' = -a'\cos\alpha.$$

Ainsi on peut remplacer les deux équations différentielles en b_1 et c_1 par les deux relations suivantes :

$$b_1\sin\omega t + c_1\cos\omega t = -a''_1,$$

$$b_1\cos\omega t - c_1\sin\omega t = -a'.\cos\alpha.$$

En opérant de même, on trouve que les deux équations différentielles en b''_1 et c''_1 peuvent être remplacées par les relations

$$b''_1\sin\omega t + c''_1\cos\omega t = -a''_1\operatorname{tang}\alpha,$$

$$b''_1\cos\omega t - c''_1\sin\omega t = -a'\sin\alpha.$$

On voit d'après cela que tous les cosinus dépendent seulement de a' et a''_1, et cela était évident *à priori*, parce que, ω étant constant, le mouvement de l'axe de figure détermine celui des deux autres axes d'inertie.

7. Pour avoir a' et a''_1, il faut, d'après les relations précédentes, connaitre les deux expressions $q\sin\omega t + r\cos\omega t$, $q\cos\omega t - r\sin\omega t$, au premier ordre près.

Les équations aux rotations sont

$$l'^2\frac{dq}{dt} = (l'^2 - l^2)\omega r - \mu c'' + \varepsilon(Cu'' - Dq),$$

$$l'^2\frac{dr}{dt} = -(l'^2 - l^2)\omega q + \mu b'' - \varepsilon(Cu' + Dr).$$

Négliger les puissances de ε et μ supérieures à la première, cela revient à faire ε et μ nuls dans b'', c'', $Cu' + Dr$, $Cu'' - Dq$.

Il faut, par conséquent, supprimer les termes Dq, Dr; remplacer b'' et c'' par $\cos\alpha\sin\omega t$ et $\cos\alpha\cos\omega t$, puis calculer u' et u'' en y négli-

geant les termes du premier ordre. On a

$$u' = b\,\frac{dx}{dt} + b'\,\frac{dy}{dt} + b''\,\frac{dz}{dt},$$

$$u'' = c\,\frac{dx}{dt} + c'\,\frac{dy}{dt} + c''\,\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt,$$

$$b = -\sin\alpha \sin\omega t, \quad c = -\sin\alpha\cos\omega t, \quad b'' = \cos\alpha\sin\omega t, \quad c'' = \cos\alpha\cos\omega t.$$

Donc

$$u' = -gt\cos\alpha\,.\,\sin\omega t, \quad u'' = -gt\cos\alpha\,.\,\cos\omega t.$$

Les équations aux rotations deviennent alors

$$\frac{dq}{dt} = \frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega r - \frac{1}{l'^2}(\mu + \varepsilon C g t)\cos\alpha\cos\omega t,$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega q + \frac{1}{l'^2}(\mu + \varepsilon C g t)\cos\alpha\sin\omega t.$$

Je pose comme précédemment

$$q = M\sin\left(\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega t\right) + M'\cos\left(\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega t\right),$$

$$r = M\cos\left(\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega t\right) - M'\sin\left(\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega t\right),$$

d'où l'on déduit

$$q\sin\omega t + r\cos\omega t = M\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\,\omega t\right) + M'\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\,\omega t\right),$$

$$q\cos\omega t - r\sin\omega t = -M\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\,\omega t\right) + M'\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\,\omega t\right),$$

Les deux équations différentielles deviennent

$$\sin\left(\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega t\right)\frac{dM}{dt} + \cos\left(\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega t\right)\frac{dM'}{dt} = -\frac{1}{l'^2}(\mu + \varepsilon C g t)\cos\alpha\cos\omega t,$$

$$\cos\left(\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega t\right)\frac{dM}{dt} - \sin\left(\frac{l'^2 - l^2}{l'^2}\,\omega t\right)\frac{dM'}{dt} = \frac{1}{l'^2}(\mu + \varepsilon C g t)\cos\alpha\sin\omega t,$$

lesquelles peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{1}{l'^2}(\mu + \varepsilon Cgt)\cos\alpha \sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right),$$

$$\frac{dM'}{dt} = -\frac{1}{l'^2}(\mu + \varepsilon Cgt)\cos\alpha \cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right).$$

Intégrant et tenant compte de ce que M et M′ sont nuls pour $t = o$, on obtient

$$M = \frac{\cos\alpha}{l^2\omega}\left[\mu - (\mu + \varepsilon Cgt)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) + \frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon Cg \sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right],$$

$$M' = -\frac{\cos\alpha}{l^2\omega}\left[\frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon Cg + \mu \sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon Cg \cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

Ces valeurs donnent

$$q\sin\omega t + r\cos\omega t = -\frac{\cos\alpha}{l^2\omega}\left[\mu + \varepsilon Cgt - \mu\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon Cg \sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right],$$

$$q\cos\omega t - r\sin\omega t = -\frac{\cos\alpha}{l^2\omega}\left[\frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon Cg + \mu \sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon Cg \cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right];$$

on en conclut

$$\frac{d\alpha'}{dt} = -\frac{\cos\alpha}{l^2\omega}\left[\mu + \varepsilon Cgt - \mu\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon Cg \sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right],$$

$$\frac{d\alpha'_1}{dt} = \frac{l'^2}{l^4}\frac{\cos^2\alpha}{\omega^2}\left[\varepsilon Cg + \frac{l^2\omega}{l'^2}\mu \sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \varepsilon Cg \cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

En intégrant, on obtient

$$\alpha' = -\frac{\cos\alpha}{l^2\omega}\left[\mu t + \frac{1}{2}\varepsilon Cgt^2 - \mu\frac{l'^2}{l^2\omega}\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \varepsilon Cg \cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \varepsilon Cg\right],$$

$$\alpha'_1 = \frac{l'^2\cos^2\alpha}{l^4\omega^2}\left[\varepsilon Cgt + \mu - \mu\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon Cg \sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

Une parallèle à l'axe de révolution menée par l'origine des coordon-

nées a pour projection sur le plan horizontal une droite dont l'équation est

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{a'}.$$

Si l'on appelle ψ l'angle que cette droite fait avec Ox, on a

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{a'}{a},$$

c'est-à-dire, en négligeant les termes du deuxième ordre,

$$\psi = \frac{a'}{\cos\alpha}.$$

On a donc

$$\psi = -\frac{1}{l^2\omega}\left[\mu t - \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \varepsilon C g + \frac{1}{2}\varepsilon C g t^2 \right.$$
$$\left. - \mu\frac{l'^2}{l^2\omega}\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) + \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \varepsilon C g \cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

Les valeurs de ψ et de $a'' = \sin\alpha + a''_1$ définissent le mouvement du projectile autour de son centre de gravité.

Elles renferment des termes périodiques et des termes non périodiques.

8. Je considère la droite dont le mouvement serait défini par les termes non périodiques, de sorte qu'on aura pour cette droite

$$\psi = -\frac{1}{l^2\omega}\left[-\left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \varepsilon C g + \mu t + \frac{1}{2}\varepsilon C g t^2\right],$$

$$a''_1 = \frac{l'^2\cos^2\alpha}{l^4\omega^2}(\mu + \varepsilon C g t).$$

Cette droite représente la position moyenne de l'axe du projectile. Je l'appellerai l'axe moyen. L'axe réel tourne autour de cet axe moyen : je l'appellerai l'axe vrai. J'appellerai encore pôle moyen et pôle vrai les extrémités de longueurs égales à l'unité portées sur ces deux axes à partir de l'origine.

Les formules qui précèdent montrent que l'axe moyen tourne autour

de la verticale menée par le centre de gravité et que ce mouvement est uniformément varié. Il change de sens avec le sens de la rotation initiale du solide autour de son axe de figure, et il est d'autant plus lent que la vitesse de rotation initiale est plus grande.

Ce mouvement est l'analogue de celui qu'on appelle en Astronomie mouvement de précession.

Outre ce mouvement de rotation autour de la verticale, l'axe moyen possède un second mouvement, en vertu duquel il se rapproche ou s'éloigne de la verticale. Ce second mouvement est beaucoup plus lent que le premier si ω est grand, et son sens est indépendant du signe de ω, c'est-à-dire du sens de la rotation du solide autour de son axe de figure. La vitesse de ce mouvement est *constante*.

Ce mouvement est l'analogue de celui qu'on appelle en Astronomie variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique.

9. Il reste à étudier le mouvement du pôle vrai autour du pôle moyen. De l'origine comme centre, je décris une sphère avec un rayon égal à l'unité. Soient P et p les points où les axes moyen et vrai percent cette sphère; OA et OB les rayons qui coïncident avec les axes Ox et Oz.

Fig. 1.

Je mène les axes de grand cercle BP et Bp qui percent le plan horizontal en C et D, puis l'arc de grand cercle ACD. Par le point p, je mène l'arc de petit cercle pE perpendiculaire à l'arc de grand cercle BP. Soit E le point d'intersection des deux arcs. Les arcs PE, pE étant très-petits peuvent être considérés comme rectilignes; je les appellerai ξ et η, et je compterai ξ positivement de P vers C, et η positivement de C vers D. Je cherche maintenant les valeurs de ξ et η.

L'arc BE étant égal à Bp, on a

$$\cos(\mathrm{BP}+\xi)=\sin\alpha+\frac{l'^2\cos^2\alpha}{l^4\omega^2}(\mu+\varepsilon\mathrm{C}gt)$$
$$-\frac{l'^2\cos^2\alpha}{l^4\omega^2}\left[\mu\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)+\frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon\mathrm{C}g\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right],$$

ou

$$\cos\mathrm{BP}-\xi\sin\mathrm{BP}=\sin\alpha+\frac{l'^2\cos^2\alpha}{l^4\omega^2}(\mu+\varepsilon\mathrm{C}gt)$$
$$-\frac{l'^2\cos^2\alpha}{l^4\omega^2}\left[\mu\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)+\frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon\mathrm{C}g\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

sin BP doit être remplacé par $\cos\alpha$, parce qu'il est multiplié par ξ, et

$$\cos\mathrm{BP}=\sin\alpha+\frac{l'^2\cos^2\alpha}{l^4\omega^2}(\mu+\varepsilon\mathrm{C}gt).$$

Donc

$$\xi=\frac{l'^2\cos\alpha}{l^4\omega^2}\left[\mu\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)+\frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon\mathrm{C}g\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

D'autre part, on a

$$\eta=\mathrm{DC}\cos\alpha.$$

L'arc AD a même valeur que sa tangente à l'approximation convenue; donc

$$\eta=\frac{l'^2\cos\alpha}{l^4\omega^2}\left[\mu\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)-\frac{l'^2}{l^2\omega}\varepsilon\mathrm{C}g\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

En faisant la somme des carrés de ξ et η, on obtient

$$\xi^2+\eta^2=\frac{l'^4\cos^2\alpha}{l^8\omega^4}\left(\mu^2+\frac{l'^4}{l^4\omega^2}\varepsilon^2\mathrm{C}^2g^2\right),$$

quantité indépendante du temps. On en conclut que l'axe vrai tourne autour de l'axe moyen en décrivant autour de lui un cône de révolution. La durée de ce mouvement périodique est $2\pi\frac{l'^2}{l^2\omega}$, quantité très-petite si ω est grand. Il faut maintenant trouver le sens de ce mouvement. Il est déterminé par le signe de l'expression

$$\xi\frac{d\eta}{dt}-\eta\frac{d\xi}{dt}.$$

Cette expression a pour valeur

$$\frac{l'^2 \cos^2\alpha}{l^6 \omega^2}\left(\mu^2 + \frac{l'^4}{l^4 \omega^2}\varepsilon^2 C^2 g^2\right).$$

On en conclut que le sens de ce mouvement est le même que celui de la rotation du projectile autour de son axe de figure. De plus, la vitesse est constante et égale à $\frac{l^2 \omega}{l'^2}$.

Le mouvement de l'axe vrai autour de l'axe moyen est l'analogue de celui qu'on appelle en Astronomie mouvement de nutation.

10. Le mouvement du solide autour de son centre de gravité étant maintenant connu, je vais déterminer le mouvement de ce point. Dans les valeurs de u, u', u'', je fais

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha + \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha - gt + \frac{dz_1}{dt},$$

$$\begin{array}{lll} a = \cos\alpha + a_1, & & a'' = \sin\alpha + a''_1, \\ b = -\sin\alpha \sin\omega t + b_1, & b' = \cos\omega t, & b'' = \cos\alpha \sin\omega t + b''_1, \\ c = -\sin\alpha \cos\omega t + c_1, & c' = -\sin\omega t, & c'' = \cos\alpha \cos\omega t + c''_1, \end{array}$$

et je néglige les puissances des nouvelles variables supérieures à la première. J'obtiens ainsi

$$u = v_0 - gt \sin\alpha + \cos\alpha \frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha \frac{dz_1}{dt} - a''_1 gt,$$

$$\begin{aligned} u' = & -gt \cos\alpha \sin\omega t - \left(\sin\alpha \frac{dx_1}{dt} - \cos\alpha \frac{dz_1}{dt}\right) \sin\omega t \\ & + \frac{dy}{dt} \cos\omega t + b_1 v_0 \cos\alpha + b''_1 (v_0 \sin\alpha - gt), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u'' = & -gt \cos\alpha \cos\omega t - \left(\sin\alpha \frac{dx_1}{dt} - \cos\alpha \frac{dz_1}{dt}\right) \cos\omega t \\ & - \frac{dy}{dt} \sin\omega t + c_1 v_0 \cos\alpha + c''_1 (v_0 \sin\alpha - gt). \end{aligned}$$

On obtient ensuite au même degré d'approximation

$$\Sigma\, \mathrm{VX}\, ds = \mathrm{A}(v_0 - gt \sin\alpha) + \mathrm{A}\left(\cos\alpha \frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha \frac{dz_1}{dt}\right) - \mathrm{A}\, gt\, a''_1,$$

$$\Sigma\, VY\, ds = -Bgt\cos\alpha\sin\omega t + B\left(-\sin\alpha\frac{dx_1}{dt} + \cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)\sin\omega t$$
$$+ B\frac{dy}{dt}\cos\omega t + B[b_1 v_0\cos\alpha + b''_1(v_0\sin\alpha - gt)] + Cr,$$

$$\Sigma\, VZ\, ds = -Bgt\cos\alpha\cos\omega t + B\left(-\sin\alpha\frac{dx_1}{dt} + \cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)\cos\omega t$$
$$- B\frac{dy}{dt}\sin\omega t + B[c_1 v_0\cos\alpha + c''_1(v_0\sin\alpha - gt)] - Cq.$$

Portant ces valeurs et celles des cosinus dans les équations du mouvement, j'obtiens au deuxième ordre près, en tenant compte des relations précédemment trouvées,

$$b'_1 = 0, \quad c'_1 = 0, \quad a_1 = -a''_1\tan\alpha,$$
$$b_1\sin\omega t + c_1\cos\omega t = -\alpha''_1, \qquad b_1\cos\omega t - c_1\sin\omega t = -\alpha'\cos\alpha,$$
$$b''_1\sin\omega t + c''_1\cos\omega t = -\alpha''_1\tan\alpha, \quad b''_1\cos\omega t - c''_1\sin\omega t = -\alpha'\sin\alpha,$$
$$\frac{da''_1}{dt} = -\cos\alpha(q\cos\omega t - r\sin\omega t), \quad \frac{da'}{dt} = q\sin\omega t + r\cos\omega t,$$

les valeurs suivantes :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\varepsilon\Big[A\cos\alpha(v_0 - gt\sin\alpha) + B\sin\alpha\cos\alpha . gt$$
$$+ A\cos\alpha\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)$$
$$+ B\sin\alpha\left(\sin\alpha\frac{dx_1}{dt} - \cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)$$
$$+ (B - A)(v_0\sin\alpha + gt\cos 2\alpha)\frac{a''_1}{\cos\alpha} - C\tang\alpha\frac{da''_1}{dt}\Big],$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = -\varepsilon\Big[A\sin\alpha(v_0 - gt\sin\alpha) - B\cos^2\alpha . gt$$
$$+ A\sin\alpha\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)$$
$$- B\cos\alpha\left(\sin\alpha\frac{dx_1}{dt} - \cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)$$
$$- (B - A)(v_0 - 2gt\sin\alpha)a''_1 + C\frac{da''_1}{dt}\Big],$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = +\varepsilon\Big[(B - A)(v_0 - gt\sin\alpha)a' - C\frac{da'_1}{dt}\Big].$$

11. Les deux premières valeurs peuvent s'écrire autrement. En ne prenant que les termes du premier ordre, on obtient

$$\cos\alpha \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \sin\alpha \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\varepsilon A (v_0 - gt\sin\alpha),$$

$$\sin\alpha \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \cos\alpha \frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\varepsilon B . gt\sin\alpha;$$

d'où, en intégrant,

$$\cos\alpha \frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha \frac{dz_1}{dt} = -\varepsilon A \left(v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \sin\alpha\right),$$

$$\sin\alpha \frac{dx_1}{dt} - \cos\alpha \frac{dz_1}{dt} = -\frac{1}{2}\varepsilon B \sin\alpha . gt^2.$$

En portant ces valeurs dans les équations, il vient

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x_1}{dt^2} = & -\varepsilon[A v_0 \cos\alpha + (B - A) gt \sin\alpha\cos\alpha] \\ & + \varepsilon^2\left[A^2 v_0 t\cos\alpha + \frac{1}{2}(B^2 - A^2) gt^2 \sin\alpha\cos\alpha\right] \\ & + (B - A)(v_0 \sin\alpha - gt\cos 2\alpha)\frac{a''_1}{\cos\alpha} - C\tang\alpha \frac{da''_1}{dt}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} = & -\varepsilon[A v_0 \sin\alpha + (B\cos^2\alpha + A\sin^2\alpha) gt] \\ & + \varepsilon^2\left[A^2 v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}(B^2\cos^2\alpha + A^2\sin^2\alpha) gt^2\right] \\ & - (B - A)(v_0 - 2gt\sin\alpha) a''_1 + C\frac{da''_1}{dt}.\end{aligned}$$

Ces formules permettent de calculer x_1 et z_1 et par suite x et z, parce que a''_1 et $\frac{da''_1}{dt}$ sont des fonctions connues du temps.

Dans le cas où la vitesse de rotation est considérable, ces fonctions restent toujours très-petites, comme cela a été démontré précédemment. On peut alors les supprimer et l'on obtient en intégrant deux fois :

$$\begin{aligned}x = v_0 t\cos\alpha & - \varepsilon\cos\alpha\left[\frac{1}{2} A v_0 t^2 + \frac{1}{6}(B - A) gt^3 \sin\alpha\right] \\ & + \varepsilon^2\cos\alpha\left[\frac{1}{6} A^2 v_0 t^3 + \frac{1}{24}(B^2 - A^2) gt^4 \sin\alpha\right],\end{aligned}$$

$$z = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} - \varepsilon\left[\frac{1}{2}\mathrm{A}v_0 t^2 \sin\alpha - \frac{1}{6}(\mathrm{B}\cos^2\alpha + \mathrm{A}\sin^2\alpha)gt^3\right]$$
$$+ \varepsilon^2\left[\frac{1}{6}\mathrm{A}^2 v_0 t^3 \sin\alpha - \frac{1}{24}(\mathrm{B}^2\cos^2\alpha + \mathrm{A}^2\sin^2\alpha)gt^4\right],$$

si le projectile est une sphère $\mathrm{B} = \mathrm{A}$. Les formules sont alors celles que l'on obtient quand on détermine le mouvement d'un point matériel pesant dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse et dirigée suivant la tangente à la trajectoire en sens contraire du mouvement. Les inconnues peuvent s'obtenir sous forme finie; mais si l'on développe les valeurs trouvées en séries ordonnées suivant les puissances croissantes du coefficient de résistance, les premiers termes sont exactement ceux qui représentent les valeurs ci-dessus de x et de z dans lesquelles on fait $\mathrm{B} = \mathrm{A}$.

12. Je considère la valeur de $\dfrac{d^2y}{dt^2}$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\left[(\mathrm{B}-\mathrm{A})(v_0 - gt\sin\alpha)a' - \mathrm{C}\frac{da'}{dt}\right].$$

Cette formule montre qu'il y a une dérivation, et que cette dérivation est une conséquence de la rotation de l'axe du projectile autour de la verticale menée par le centre de gravité. Comme le sens de cette rotation change en même temps que celui de la rotation du projectile autour de son axe de figure, il en résulte qu'il en est de même de la dérivation.

Supposons que la vitesse de rotation soit considérable, on pourra alors dans a' et $\dfrac{da'}{dt}$ négliger les termes périodiques, lesquels déterminent le mouvement de nutation de l'axe. On obtient alors

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\varepsilon\cos\alpha}{l^2\omega}\left[-(\mathrm{B}-\mathrm{A})(v_0 - gt\sin\alpha\left(\mu t + \frac{1}{2}\varepsilon\mathrm{C}gt^2\right) + \varepsilon\mathrm{C}^2gt\right].$$

Considérons le cas où le projectile est plein; le centre de poussée coïncidant alors avec le centre de gravité, μ est nul, et l'on a, en ordonnant,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2\cos\alpha}{l^2\omega}\left[-2\mathrm{C}^2gt + (\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{C}v_0gt^2 - (\mathrm{B}-\mathrm{A})\mathrm{C}g^2t^3\sin\alpha\right],$$

d'où, en intégrant deux fois,

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon^2 C \cos\alpha}{l^2\omega} g t^3 \left[-\frac{1}{3} C + \frac{1}{12}(B - A) v_0 t - \frac{1}{20}(B - A) g t^2 \sin\alpha \right].$$

Dans les premiers instants la parenthèse a le signe de $-\frac{1}{3}C$; donc y a le signe de ω. Si, pour fixer les idées, je suppose ω négatif, comme c'est le cas pour les projectiles lancés par les canons rayés, la dérivation se fera d'abord à gauche; mais si v_0 est très-grand, et si de plus C et $B - A$ sont de même signe, cette dérivation à gauche ne durera qu'un temps très-court, de sorte qu'elle pourra être insensible. Après une fraction très-petite de seconde, le projectile repassera par le plan du tir, et, à partir de cet instant, la dérivation se fera à droite. Si l'angle de tir α est petit, comme c'est le cas ordinaire, la formule devient sensiblement

$$y = -\frac{1}{24} \frac{\varepsilon^2 C(B - A)}{l^2\omega} v_0 g t^4 \cos\alpha.$$

Pour une même bouche à feu, $\frac{v_0}{\omega}$ est constant; on en conclut que la dérivation produite au bout d'un temps donné est indépendante de la charge.

13. J'applique cette théorie à quelques exemples.

1° Le projectile est plein, homogène et à centre.

μ est nul, l'intégrale

$$C = \Sigma Y (Y x' - X y') ds$$

est nulle également, parce que ses éléments sont deux à deux égaux et de signes contraires. Par conséquent, l'axe de figure restera parallèle à lui-même et la dérivation n'existera pas.

2° Le projectile est une sphère homogène, mais creuse.

La cavité est sphérique et son centre placé sur l'axe de rotation, mais en un point différent du centre du projectile.

Si le centre de la cavité est en avant du centre de la sphère, le centre de gravité se trouvera en arrière du centre de figure; μ sera donc positif. L'intégrale C se réduit à $\Sigma Y^2 x' ds$.

Cette quantité étant nulle quand l'origine est le centre de figure, devient positive quand elle est portée en arrière, parce que x' aug-

mente. Ainsi μ et C sont positifs tous deux. Il en résulte que le sens du mouvement de précession est le contraire de celui de la rotation initiale. Les deux mouvements seraient de même sens si le centre de la cavité était en arrière du centre de la sphère.

La formule de dérivation se réduit dans ce cas à

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\varepsilon^2 C^2 \cos\alpha}{l^2 \omega} gt,$$

parce que $A = B$; elle montre que la dérivation a dans les deux cas le signe de ω. De plus, elle ne dépend pas de la vitesse initiale v_0.

3° Le projectile est formé d'un cylindre plein surmonté d'un hémisphère de même rayon.

Soient R et H le rayon et la hauteur du cylindre.

Calcul de $A = \Sigma X^2 ds$. — La partie de A qui correspond à la surface cylindrique est nulle, celle qui correspond à la base du cylindre est πR^2.

Pour avoir celle qui correspond à l'hémisphère, j'appellerai φ l'angle que la normale en un point d'un certain parallèle fait avec l'axe, et θ l'angle que le méridien qui passe en ce point fait avec yOx. On a alors

$$X = \cos\varphi, \quad ds = R^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

L'intégrale à calculer devient

$$\Sigma \cos^2\varphi \,.\, R^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta,$$

l'intégration par rapport à θ devant être faite entre o et 2π, et l'intégration par rapport à φ, entre o et $\frac{\pi}{2}$. On obtient ainsi $\frac{2}{3}\pi R^2$. Donc

$$A = \pi R^2 + \frac{2}{3}\pi R^2.$$

Calcul de $B = \Sigma Y^2 ds$. — La partie de B qui correspond à la surface du cylindre est

$$\Sigma \cos^2\theta \, d\theta \, R \, dx = \pi R H.$$

La partie qui correspond à l'hémisphère a pour expression

$$\Sigma \cos^2\theta \sin^2\varphi \, R^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = \pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \, d\varphi = \frac{2}{3}\pi R^2.$$

Donc

$$B = \pi RH + \frac{2}{3}\pi R^2.$$

Il en résulte

$$B - A = \pi R(H - R).$$

CALCUL DE $C = \Sigma Y(Yx' - Xy')\,ds$. — Cette intégrale se compose de deux termes, l'un qui dépend de la position du centre de gravité, l'autre qui n'en dépend pas. Je calcule d'abord le second, $\Sigma XYy'\,ds$.

Cette intégrale n'existe que pour l'hémisphère. On a, en conservant les mêmes notations,

$$y' = R\sin\varphi\cos\theta, \quad Y = \sin\varphi\cos\theta.$$

Donc

$$\Sigma XYy'\,ds = \pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{4}R^3.$$

Pour avoir l'autre terme, il faut d'abord déterminer la position du centre de gravité. Le centre de gravité g du cylindre est au milieu de l'axe, celui g' de l'hémisphère à une distance du plan de sa base égale à $\frac{3}{8}R$. Soit G le centre de gravité du solide entier, on a

$$\frac{Gg}{\frac{2}{3}R} = \frac{Gg'}{H} = \frac{\frac{1}{2}H + \frac{3}{8}R}{H + \frac{2}{3}R},$$

d'où

$$Gg = \frac{1}{3}R\,\frac{H + \frac{3}{4}R}{H + \frac{2}{3}R}.$$

La distance de la base de l'hémisphère au centre de gravité G est alors

$$\frac{1}{2}\,\frac{H^2 - \frac{1}{2}R^2}{H + \frac{2}{3}R}.$$

Il en résulte que l'abscisse d'un point de l'hémisphère est

$$x' = \frac{1}{2}\,\frac{H^2 - \frac{1}{2}R^2}{H + \frac{2}{3}R} + R\cos\varphi.$$

Calculons maintenant l'intégrale $\Sigma Y^2 x'\,ds$. Elle se compose d'une partie correspondant à la surface du cylindre. Cette partie est égale à

$$\Sigma \cos^2\theta\, x' R\, d\theta\, dx' = \pi R \int x'\,dx'.$$

En prenant les limites voulues, on obtient

$$-\pi R H \frac{1}{3} R \frac{H + \frac{3}{4}R}{H + \frac{2}{3}R}.$$

La partie qui correspond à l'hémisphère a pour valeur

$$\Sigma \sin^2\varphi \cos^2\theta \left(\frac{1}{2}\,\frac{H^2 - \frac{1}{2}R^2}{H + \frac{2}{3}R} + R\cos\varphi\right) R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \pi R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \left(\frac{1}{2}\,\frac{H^2 - \frac{1}{2}R^2}{H + \frac{2}{3}R} + R\cos\varphi\right) d\varphi,$$

c'est-à-dire, en effectuant,

$$\frac{1}{3}\pi R^3 \frac{H^2 - \frac{1}{2}R^2}{H + \frac{2}{3}R} + \frac{1}{4}\pi R^3.$$

Donc

$$\Sigma Y^2 x'\,ds = 0.$$

Donc enfin on obtient pour C, toutes réductions faites,

$$C = -\frac{1}{4}\pi R^3.$$

C est négatif, B − A est positif quand $H > R$. On en conclut, si ω est négatif, que l'axe du projectile est dévié vers la gauche et que la dérivation se fait à gauche. Si, au contraire, $H < R$, l'axe est encore dévié vers la gauche, mais la dérivation se fait à droite.

4° Je prends pour projectile un cylindre creux; la surface convexe a partout la même épaisseur, mais les deux bases ont des épaisseurs différentes.

Soient R et H le rayon et la hauteur du cylindre, a la distance du centre de gravité au point milieu de l'axe; a sera positif ou négatif suivant que l'épaisseur de la base antérieure sera supérieure ou inférieure à celle de la base postérieure.

On trouve aisément

$$B - A = \pi R (H - 2R), \quad C = -\pi R H a, \quad \mu = -K a,$$

K étant un coefficient positif. Par conséquent, si la base antérieure est plus épaisse que la base postérieure et si en même temps H dépasse 2R, l'axe du projectile tournera vers la gauche et la dérivation se fera vers la droite. Mais si H est égal ou inférieur à 2R, la dérivation se fera vers la gauche.

SECONDE PARTIE.

RÉSISTANCE PROPORTIONNELLE AU CUBE DE LA VITESSE.

Des expériences faites à Metz en 1856 et 1857 par la *Commission des principes du tir* ont fait connaître que la résistance de l'air sur des boulets sphériques pouvait être sensiblement représentée par une force unique dont l'intensité variait proportionnellement au cube de la vitesse du boulet. Il en sera ainsi si l'on suppose que chaque résistance élémentaire est proportionnelle au cube de la vitesse normale de l'élément sur lequel elle agit. Il y a donc intérêt à résoudre le problème en admettant cette nouvelle loi.

1. On démontre comme précédemment que si l'on représente par V

l'expression

$$(u + qz' - ry')X + (u' + rx' - pr')Y + (u'' + py' - qx')Z,$$

les équations qui définissent le mouvement du projectile sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varepsilon(a\Sigma V^3 X\,ds + b\Sigma V^3 Y\,ds + c\Sigma V^3 Z\,ds),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\varepsilon(a'\Sigma V^3 X\,ds + b'\Sigma V^3 Y\,ds + c'\Sigma V^3 \Sigma\,ds),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \varepsilon(a''\Sigma V^3 X\,ds + b''\Sigma V^3 Y\,ds + c''\Sigma V^3 Z\,ds);$$

$$l'^2\frac{dq}{dt} = (l'^2 - l^2)\omega r - \mu c'' - \varepsilon\Sigma V^3(Xz' - Zx')\,ds,$$

$$l'^2\frac{dr}{dt} = -(l'^2 - l^2)\omega q + \mu b'' - \varepsilon\Sigma V^3(Yx' - Xy')\,ds;$$

$$\frac{da}{dt} = br - cq, \quad \frac{da'}{dt} = b'r - c'q, \quad \frac{da''}{dt} = b''r - c''q;$$

$$\frac{db}{dt} = \omega c - ar, \quad \frac{db'}{dt} = \omega c' - a'r, \quad \frac{db''}{dt} = \omega c'' - a''r;$$

$$\frac{dc}{dt} = -\omega b + aq, \quad \frac{dc'}{dt} = -\omega b' + a'q, \quad \frac{dc''}{dt} = -\omega b'' + a''q,$$

expressions dans lesquelles u, u', u'' ont pour valeurs

$$u = a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt},$$

$$u' = b\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + b''\frac{dz}{dt},$$

$$u'' = c\frac{dx}{dt} + c'\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt}.$$

2. Développement des sommes :

$$V^3 = [uX + u'Y + u''Z + q(Xz' - Zx') + r(Yx' - Xy')]^3;$$

je développe ce cube : on sait que l'on a

$$(\Sigma a)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
V^3 = {} & u^3X^3 + u'^3Y^3 + u''^3Z^3 + 6uu'u''XYZ + q^3(Xz' - Zx')^3 + r^3(Yx' - Xy')^3 \\
& + 3u^2u'X^2Y + 3u^2u''X^2Z + 3uu'^2XY^2 + 3u'^2u''Y^2Z \\
& \qquad + 3uu''^2XZ^2 + 3u'u''^2YZ^2 \\
& + 3u^2q\,X^2(Xz' - Zx') + 3u'^2qY^2(Xz' - Zx') + 3u''^2qZ^2(Xz' - Zx') \\
& + 3u^2rX^2(Yx' - Xy') + 3u'^2rY^2(Yx' - Xy') + 3u''^2rZ^2(Yx' - Xy') \\
& + 3uq^2X(Xz' - Zx')^2 + 3u'q^2Y(Xz' - Zx')^2 + 3u''q^2Z(Xz' - Zx')^2 \\
& + 3ur^2X(Yx' - Xy')^2 + 3u'r^2Y(Yx' - Xy')^2 + 3u''r^2Z(Yx' - Xy')^2 \\
& + 3q^2r(Xz' - Zx')^2(Yx' - Xy') + 3qr^2(Xz' - Zx')(Yx' - Xy')^2 \\
& + 6u'u''qYZ(Xz' - Zx') + 6uu''qXZ(Xz' - Zx') \\
& \qquad + 6uu'qXY(Xz' - Zx') \\
& + 6u'u''rYZ(Yx' - Xy') + 6uu''rXZ(Yx' - Xy') \\
& \qquad + 6uu'rXY(Yx' - Xy') \\
& + 6uqrX(Xz' - Zx')(Yx' - Xy') + 6u'qrY(Xz' - Zx')(Yx' - Xy') \\
& \qquad + 6u''qrZ(Xz' - Zx')(Yx' - Xy').
\end{aligned}$$

Pour avoir les sommes cherchées, il faut multiplier cette expression successivement par

$$X\,ds, \quad Y\,ds, \quad Z\,ds, \quad (Xz' - Zx')\,ds, \quad (Yx' - Xy')\,ds,$$

et intégrer sur toute la surface. On remarquera comme précédemment que les intégrales dont les éléments sont de degré impair par rapport à Y et y', ou bien par rapport à Z et z', sont nulles. On obtient

$$\begin{aligned}
\Sigma V^3X\,ds = {} & u^3\Sigma X^4\,ds + 3uu'^2\Sigma X^2Y^2\,ds + 3uu''^2\Sigma X^2Z^2\,ds \\
& + 6uu''q\Sigma X^2Z(Xz' - Zx')\,ds + 6uu'r\Sigma X^2Y(Yx' - Xy')\,ds \\
& + 3uq^2\Sigma X^2(Xz' - Zx')^2\,ds + 3ur^2\Sigma X^2(Yx' - Xy')\,ds,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma V^3Y\,ds = {} & u'^3\Sigma Y^4\,ds + 3u^2u'\Sigma X^2Y^2\,ds + 3u'u''^2\Sigma Y^2Z^2\,ds \\
& + 3u^2r\Sigma X^2Y(Yx' - Xy')\,ds + 3u'^2r\Sigma Y^3(Yx' - Xy')\,ds \\
& + 3u''^2r\Sigma YZ^2(Yx' - Xy')\,ds + 6u'u''q\Sigma Y^2Z(Xz' - Zx')\,ds \\
& + 3u'q^2\Sigma Y^2(Xz' - Zx')^2\,ds + 3u'r^2\Sigma Y^2(Yx' - Xy')^2\,ds \\
& + 6u''qr\Sigma YZ(Xz' - Zx')(Yx' - Xy')\,ds \\
& + r^3\Sigma Y(Yx' - Xy')^3\,ds + 3q^2r\Sigma Y(Xz' - Zx')^2(Yx' - Xy')\,ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma V^3 Z\,ds = {} & u''^3 \Sigma Z^4 ds + 3u^2 u'' \Sigma X^2 Z^2 ds + 3u'^2 u'' \Sigma Y^2 Z^2 ds \\
& + 3u^2 q \Sigma X^2 Z (Xz' - Zx')\,ds + 3u'^2 q \Sigma Y^2 Z (Xz' - Zx')\,ds \\
& + 3u''^2 q \Sigma Z^3 (Xz' - Zx')\,ds + 6u'u'' r \Sigma YZ^2 (Yx' - Xy')\,ds \\
& + 3u'' q^2 \Sigma Z^2 (Xz' - Zx')^2 ds + 3u'' r^2 \Sigma Z^2 (Yx' - Xy')^2 ds \\
& + 6u' qr \Sigma YZ (Xz' - Zx')(Yx' - Xy')\,ds + q^3 \Sigma Z (Xz' - Zx')^3 ds \\
& + 3qr^2 \Sigma Z (Xz' - Zx')(Yx' - Xy')^2 ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma V^3 (Xz' - Zx')\,ds = {} & u''^3 \Sigma Z^3 (Xz' - Zx')\,ds + 3u^2 u'' \Sigma X^2 Z (Xz' - Zx')\,ds \\
& + 3u'^2 u'' \Sigma Y^2 Z (Xz' - Zx')\,ds \\
& + 3u^2 q \Sigma X^2 (Xz' - Zx')^2 ds + 3u'^2 q \Sigma Y^2 (Xz' - Zx')^2 ds \\
& + 3u''^2 q \Sigma Z^2 (Xz' - Zx')^2 ds \\
& + 6u'u'' r \Sigma YZ (Yx' - Xy')(Xz' - Zx')\,ds \\
& + 3u'' q^2 \Sigma Z (Xz' - Zx')^3 ds \\
& + 3u'' r^2 \Sigma Z (Yx' - Xy')^2 (Xz' - Zx')\,ds \\
& + 6u' qr \Sigma Y (Xz' - Zx')^2 (Yx' - Xy')\,ds \\
& + q^3 \Sigma (Xz' - Zx')^4 ds \\
& + 3qr^2 \Sigma (Xz' - Zx')^2 (Yx' - Xy')^2 ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Sigma V^3 (Yx' - Xy')\,ds = {} & u'^3 \Sigma Y^3 (Yx' - Xy')\,ds + 3u^2 u' \Sigma X^2 Y (Yx' - Xy')\,ds \\
& + 3u'u''^2 \Sigma YZ^2 (Yx' - Xy')\,ds \\
& + 3u^2 r \Sigma X^2 (Yx' - Xy')^2 ds + 3u'^2 r \Sigma Y^2 (Yx' - Xy')^2 ds \\
& + 3u''^2 r \Sigma Z^2 (Yx' - Xy')^2 ds \\
& + 6u'u'' q \Sigma YZ (Xz' - Zx')(Yx' - Xy')\,ds \\
& + 3u' q^2 \Sigma Y (Xz' - Zx')^2 (Yx' - Xy')\,ds \\
& + 3u' r^2 \Sigma Y (Yx' - Xy')^3 ds \\
& + 6u'' qr \Sigma Z (Xz' - Zx')(Yx' - Xy')^2 ds \\
& + r^3 \Sigma (Yx' - Xy')^4 ds \\
& + 3q^2 r \Sigma (Xz' - Zx')^2 (Yx' - Xy')^2 ds.
\end{aligned}
$$

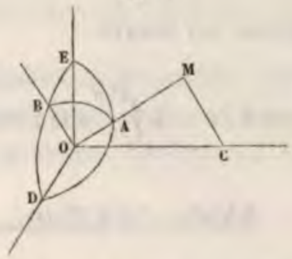
3. Les deux remarques suivantes permettent de simplifier ces expressions.

1° Les intégrales dont les éléments ne diffèrent que par le changement de Y et y' en Z et z', et réciproquement, sont égales.

2° Les intégrales dont les éléments sont du quatrième degré par rap-

port à Y et y' ou bien par rapport à Z et z' se ramènent à des intégrales dont les éléments sont du deuxième degré par rapport à ces variables. En effet, soient M un point appartenant au parallèle dont le

Fig. 2.



centre est C; MO la normale en ce point qui rencontre l'axe en O; OB la projection de cette normale sur le plan perpendiculaire à l'axe; OD et OE des parallèles aux axes menées par le point O.

Du point O comme centre je décris une sphère de rayon égal à l'unité. Soient A, B, D, E les points où elle est rencontrée par les droites passant en O; je mène les arcs de grands cercles AB, AE, AD, DBE. Soient maintenant φ l'angle que la normale fait avec l'axe et θ l'angle que le méridien du point M fait avec le plan $y'\,O\,x'$. Il est visible que

$$AB = \frac{\pi}{2} - \varphi,\quad \cos AD = Y,\quad \cos AE = Z,\quad BD = \theta,\quad EB = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

Les deux triangles sphériques ABD, ABE donnent

$$Y = \sin\varphi\cos\theta,\quad Z = \sin\varphi\sin\theta.$$

On a d'ailleurs

$$X = \cos\varphi,\quad y' = \rho\cos\theta,\quad z' = \rho\sin\theta,$$

en appelant ρ le rayon MC. L'élément de surface est un petit rectangle dont les côtés sont les différentielles des arcs du parallèle et du méridien passant par le point M; l'arc de parallèle a pour différentielle $\rho\,d\theta$ et celui du méridien $\frac{dx'}{\sin\varphi}$; donc

$$ds = \frac{\rho\,d\theta\,dx'}{\sin\varphi}.$$

Considérons maintenant l'intégrale $\Sigma Y^4 ds$; elle devient

$$\Sigma \cos^4\theta\, d\theta \sin^5\varphi\, \rho\, dx' = \int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta \int \sin^5\varphi\, \rho\, dx';$$

or, en intégrant par parties, on trouve

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = 3\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta;$$

on en conclut

$$\Sigma Y^4 ds = 3\Sigma Y^2 Z^2 ds.$$

On démontre de même que

$$\begin{aligned}
&\Sigma Y^3 (Yx' - Xy')\, ds = 3\Sigma YZ^2 (Yx' - Xy')\, ds,\\
&\Sigma Y^2 (Yx' - Xy')^2\, ds = 3\Sigma Y^2 (Xz' - Zx')^2\, ds,\\
&\Sigma Y (Yx' - Xy')^3\, ds = 3\Sigma Y (Xz' - Zx')(Yx' - Xy')\, ds,\\
&\Sigma (Yx' - Xy')^4\, ds = 3\Sigma (Xz' - Zx')^2 (Yx' - Xy')\, ds.
\end{aligned}$$

Enfin

$$\Sigma YZ (Xz' - Zx')(Yx' - Xy')\, ds = -\Sigma Y^2 (Xz' - Zx')^2\, ds.$$

En effet, la surface étant de révolution, on a en chaque point

$$\frac{Y}{y'} = \frac{Z}{z'}, \quad \text{d'où} \quad \frac{Yx'}{Xy'} = \frac{Zx'}{Xz'},$$

d'où

$$\frac{Yx' - Xy'}{Y} = \frac{Zx' - Xz'}{Z},$$

et par suite

$$Z(Yx' - Xy') = Y(Zx' - Xz').$$

Donc on a en chaque point

$$YZ(Xz' - Zx')(Yx' - Xy') = -Y^2 (Zx' - Xz')^2,$$

et par conséquent

$$\Sigma YZ (Xz' - Zz')(Yx' - Xy')\, ds = -\Sigma Y^2 (Zx' - Xz')^2\, ds.$$

4. Je pose maintenant

$$\Sigma X^4\,ds = A,\quad \Sigma X^2Y^2\,ds = B,\quad \Sigma Y^2Z^2\,dt = C,\quad \Sigma X^2Y(Yx'-Xy')\,ds = D,$$

$$\Sigma YZ^2(Yx'-Xy')\,ds = E,\quad \Sigma X^2(Yx'-Xy')^2\,ds = F,\quad \Sigma Z^2(Yx'-Xy')^2\,ds = G,$$

$$\Sigma Y(Yx'-Xy')(Xz'-Zx')^2\,ds = H,\quad \Sigma (Yx'-Xy')^2(Xz'-Zx')^2\,ds = K.$$

Ces coefficients définissent le projectile; les trois premiers A, B, C représentent des surfaces, leurs valeurs dépendent seulement de la surface du projectile. Les autres coefficients dépendent de la position du centre de gravité.

Les expressions qui précèdent deviennent

$$\Sigma V^3X\,ds = Au^3 + 3Buu'^2 + 3Buu''^2 - 6Duu''q + 6Duu'r + 3Fuq^2 + 3Fur^2,$$

$$\begin{aligned}\Sigma V^3Y\,ds = {}& 3Cu'^3 + 3Bu^2u' + 3Cu'u''^2 + 3Du^2r + 9Eu'^2r + 3Eu''^2r - 6Eu'u''q \\ & + 3Gu'q^2 + 9Gu'r^2 - 6Gu''qr + 3Hr^3 + 3Hq^2r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma V^3Z\,ds = {}& 3Cu''^3 + 3Bu^2u'' + 3Cu'^2u'' - 3Du^2q - 3Eu'^2q - 9Eu''^2q + 6Eu'u''r \\ & + 9Gu''q^2 + 3Gu''r^2 - 6Gu'qr - 3Hq^3 - 3Hqr^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma V^3(Xz'-Zx')\,ds = {}& -3Eu''^3 - 3Du^2u'' - 3Eu'^2u'' + 3Fu^2q + 3Gu'^2q \\ & + 9Gu''^2q - 6Gu'u''r - 9Hu''q^2 - 3Hu''r^2 + 6Hu'qr \\ & + 3Kq^3 + 3Kqr^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma V^3(Yx'-Xy')\,ds = {}& 3Eu'^3 + 3Du^2u' + 3Eu'u''^2 + 3Fu^2r + 9Gu'^2r + 3Gu''^2r \\ & - 6Gu'u''q + 3Hu'q^2 + 9Hu'r^2 - 6Hu''qr + 3Kr^3 \\ & + 3Kq^2r.\end{aligned}$$

Les équations du mouvement étant maintenant connues, je me propose, comme dans la première Partie, de déterminer le mouvement de rotation du solide autour de son centre de gravité, en négligeant les puissances de ε et μ supérieures à la première, et cela me permettra d'avoir x, y, z, en ne négligeant que les puissances de ε et μ supérieures à la seconde.

5. Les équations aux cosinus peuvent, en négligeant les termes

En se reportant aux valeurs des cosinus, on obtient

$$\frac{da'}{dt} = -\frac{l'^2}{l^2\omega}\varphi(t) + \frac{l'^2}{l^2\omega}\varphi(o)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) + \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi'(o)\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right),$$

$$\frac{da''_1}{dt} = \cos\alpha\left[\left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi'(t) + \frac{l'^2}{l^2\omega}\varphi(o)\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi'(o)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

Intégrant, on a, pour a' et a''_1,

$$a' = -\frac{l'^2}{l^2\omega}\int_0^t \varphi(t)\,dt + \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi'(o)$$
$$+ \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi(o)\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi'(o)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right),$$

$$a''_1 = \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\cos\alpha\left[\varphi(t) - \varphi(o)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varphi'(o)\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

Si l'on appelle ψ l'angle que la projection de l'axe sur le plan yOx fait avec Ox, on a, pour définir le mouvement de l'axe, les deux relations

$$\psi = -\frac{l'^2}{l^2\omega\cos\alpha}\left[\int_0^t \varphi(t)\,dt - \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi'(o)\right.$$
$$\left. - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varphi(o)\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) + \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi'(o)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right],$$

$$a''_1 = \cos\alpha\left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\left[\varphi(t) - \varphi(o)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varphi'(o)\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

7. La position de l'axe moyen est définie par les deux expressions

$$\psi = -\frac{l'^2}{l^2\omega\cos\alpha}\left[\int_0^t \varphi(t)\,dt - \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\varphi'(o)\right],$$

$$a''_1 = \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2\cos\alpha\,\varphi(t).$$

La variation de ψ détermine le mouvement de précession. On voit que ce mouvement change de sens en même temps que la rotation du solide autour de son axe, et si la vitesse de rotation ω est très-grande, il est très-petit.

La valeur a''_1 montre que l'axe s'éloigne ou se rapproche de la ver-

ticale, et le sens de ce mouvement ne dépend pas du signe de ω; de plus, si la vitesse de rotation ω est très-grande, ce mouvement est beaucoup plus lent que le précédent.

Le mouvement du pôle vrai autour du pôle moyen est défini comme dans la première partie par les deux valeurs suivantes :

$$\xi = \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \left[\varphi(0)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) + \frac{l'^2}{l^2\omega}\varphi'(0)\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right],$$

$$\eta = \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \left[\varphi(0)\sin\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right) - \frac{l'^2}{l^2\omega}\varphi'(0)\cos\left(\frac{l^2}{l'^2}\omega t\right)\right].$$

D'où l'on déduit

$$\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^4 \left[\varphi(0)^2 + \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \varphi'(0)^2\right],$$

$$\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt} = \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^3 \left[\varphi(0)^2 + \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \varphi'(0)^2\right].$$

Donc le pôle vrai décrit une circonférence autour du pôle moyen avec une vitesse constante. Cette vitesse est

$$\frac{l^2\omega}{l'^2}.$$

La durée de la révolution est

$$\frac{2\pi l'^2}{l^2\omega}.$$

Le sens de ce mouvement est le même que celui de la rotation du solide autour de son axe.

On voit par là que la nutation de l'axe est la même que pour le premier problème ; il n'y a que le rayon du cercle qui soit changé.

Supposons ω très-grand, les formules qui définissent le mouvement de l'axe moyen pourront s'écrire

$$\psi = -\frac{l'^2}{l^2\omega\cos\alpha}\int_0^t f(t)\,dt, \quad a''_1 = \left(\frac{l'^2}{l^2\omega}\right)^2 \cos\alpha f(t),$$

ou, en remplaçant $f(t)$ par sa valeur,

$$\psi = -\frac{1}{l'^2\omega}\int_0^t \left\{ \mu + 3\varepsilon g t [D(v_0 - gt\sin\alpha)^2 + E g^2 t^2 \cos^2\alpha] \right\} dt,$$

$$a''_1 = \frac{l'^2\cos^2\alpha}{l^4\omega^2}\left\{ \mu + 3\varepsilon g t [D(v_0 - gt\sin\alpha)^2 + E g^2 t^2 \cos^2\alpha] \right\}.$$

La valeur de ψ devient, en intégrant,

$$\psi = -\frac{1}{l'^2\omega}\left[\mu t + \frac{3\varepsilon}{2} D v_0^2 g t^2 - 2\varepsilon D v_0 g t^3 \sin\alpha + \frac{3}{4}\varepsilon (D\sin^2\alpha + E\cos^2\alpha) g^3 t^4 \right].$$

Dans les premiers instants, le sens du mouvement de précession sera déterminé par le signe μ; le temps augmentant, il dépendra des signes et des grandeurs des coefficients D et E.

Mouvement du centre de gravité.

8. Au premier ordre près, on a, comme dans le premier problème,

$$u = v_0 - gt\sin\alpha + \left(\cos\alpha \frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha \frac{dz_1}{dt}\right) - a''_1 g t,$$

$$u' = - gt\cos\alpha \sin\omega t - \left(\sin\alpha \frac{dx_1}{dt} - \cos\alpha \frac{dz_1}{dt}\right)\sin\omega t$$
$$+ \frac{dy}{dt}\cos\omega t + b_1 v_0 \cos\alpha + b''_1 (v_0 \sin\alpha - gt),$$

$$u'' = - gt\cos\alpha \cos\omega t - \left(\sin\alpha \frac{dx_1}{dt} - \cos\alpha \frac{dz_1}{dt}\right)\cos\omega t$$
$$- \frac{dy}{dt}\sin\omega t + c_1 v_0 \cos\alpha + c''_1 (v_0 \sin\alpha - gt).$$

On obtient ensuite, au même degré d'approximation,

$$\Sigma V^2 X ds = 3\left\{ \frac{A}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^3 + B(v_0 - gt\sin\alpha) g^2 t^2 \cos^2\alpha \right.$$
$$+ [A(v_0 - gt\sin\alpha)^2 + B g^2 t^2 \cos^2\alpha]\left(\cos\alpha \frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha \frac{dz_1}{dt}\right)$$

$$+\,2B(v_0-gt\sin\alpha)\,gt\cos\alpha\left(\sin\alpha\frac{dx_1}{dt}-\cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)$$

$$-\left[(A-2B)(v_0-gt\sin\alpha)^2+Bg^2t^2\cos^2\alpha\right]gt\,a''_1$$

$$\left.-\,2D(v_0-gt\sin\alpha)\,gt\,\frac{da''_1}{dt}\right\},$$

$$\Sigma V^3 Y\,ds=3\left\{-\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]gt\cos\alpha\sin\omega t\right.$$

$$-\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+3Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]\left(\sin\alpha\frac{dx_1}{dt}-\cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)\sin\omega t$$

$$-\,2B(v_0-gt\sin\alpha)\,gt\cos\alpha\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt}+\sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)\sin\omega t$$

$$+\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]\frac{dy}{dt}\cos\omega t$$

$$+\,2(B-C)(v_0-gt\sin\alpha)\,g^2t^2\cos\alpha\,a''_1\sin\omega t$$

$$+\,2Eg^2t^2\cos\alpha\frac{da''_1}{dt}\sin\omega t$$

$$+\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]\left[b_1v_0\cos\alpha+b''_1(v_0\sin\alpha-gt)\right]$$

$$\left.+\left[D(v_0-gt\sin\alpha)^2+Eg^2t^2\cos^2\alpha\right]r\right\},$$

$$\Sigma V^3 Z\,ds=3\left\{-\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]gt\cos\alpha\cos\omega t\right.$$

$$-\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+3Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]\left(\sin\alpha\frac{dx_1}{dt}-\cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)\cos\omega t$$

$$-\,2B(v_0-gt\sin\alpha)\,gt\cos\alpha\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt}+\sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right)\cos\omega t$$

$$-\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]\frac{dy}{dt}\sin\omega t$$

$$-\,2(C-B)(v_0-gt\sin\alpha)\,g^2t^2\cos\alpha\,a''_1\cos\omega t$$

$$+\,2Eg^2t^2\cos\alpha\frac{da''_1}{dt}\cos\omega t$$

$$+\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]\left[c_1v_0\cos\alpha+c''_1(v_0\sin\alpha-gt)\right]$$

$$\left.-\left[D\,v_0-gt\sin\alpha)^2+Eg^2t^2\cos^2\alpha\right]q\right\}.$$

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}=-3\varepsilon\left\{\left[\frac{A}{3}(v_0-gt\sin\alpha)^3+B(v_0-gt\sin\alpha)\,g^2t^2\cos^2\alpha\right]\cos\alpha\right.$$

$$+\left[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha\right]gt\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}
&+\Big\{[A(v_0-gt\sin\alpha)^2+Bg^2t^2\cos^2\alpha]\cos\alpha \\
&\qquad\qquad +B(v_0-gt\sin\alpha)\,2gt\sin\alpha\cos\alpha\Big\}\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt}+\sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right) \\
&+\Big\{2B(v_0-gt\sin\alpha)gt\cos^2\alpha \\
&\qquad +[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+3Cg^2t^2\cos^2\alpha]\sin\alpha\Big\}\left(\sin\alpha\frac{dx_1}{dt}-\cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right) \\
&+\Big\{3(C-B)(v_0-gt\sin\alpha)g^2t^2\sin\alpha\cos\alpha+(C-B)g^3t^3\cos^3\alpha \\
&-\left(\frac{A}{3}-B\right)(v_0-gt\sin\alpha)^3\operatorname{tang}\alpha-(A-3B)(v_0-gt\sin\alpha)^2gt\cos\alpha\Big\}\alpha''_1 \\
&-\Big\{D(v_0-gt\sin\alpha)^2\operatorname{tang}\alpha+2D(v_0-gt\sin\alpha)gt\cos\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad +3Eg^2t^2\sin\alpha\cos\alpha\Big\}\frac{d\alpha''_1}{dt}\Bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z_1}{dt^2}=-3\varepsilon\Bigg(&\left[\frac{A}{3}(v_0-gt\sin\alpha)^3+B(v_0+gt\sin\alpha)g^2t^2\cos^2\alpha\right]\sin\alpha \\
&-[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha]gt\cos^2\alpha \\
&+\Big\{[A(v_0-gt\sin\alpha)^2+Bg^2t^2\cos^2\alpha]\sin\alpha \\
&\qquad\qquad -B(v_0-gt\sin\alpha)\,2gt\cos^2\alpha\Big\}\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt}+\sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right) \\
&+\Big\{2B(v_0-gt\sin\alpha)gt\sin\alpha\cos\alpha \\
&\qquad -[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+3Cg^2t^2\cos^2\alpha]\cos\alpha\Big\}\left(\sin\alpha\frac{dx_1}{dt}-\cos\alpha\frac{dz_1}{dt}\right) \\
&+\Big\{-3(C-B)(v_0-gt\sin\alpha)g^2t^2\cos^2\alpha+(C-B)g^3t^3\cos^2\alpha\sin\alpha \\
&\qquad +\left(\frac{A}{3}-B\right)(v_0-gt\sin\alpha)^3-(A-3B)(v_0-gt\sin a)^2gt\sin\alpha\Big\}\alpha''_1 \\
&+\Big\{D(v_0-gt\sin\alpha)^2-2D(v_0-gt\sin\alpha)gt\sin\alpha \\
&\qquad\qquad\qquad +3Eg^2t^2\cos^2\alpha\Big\}\frac{d\alpha''_1}{dt}\Bigg),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2}=-3\varepsilon\Big\{&\left[\left(\frac{A}{3}-B\right)(v_0-gt\sin\alpha)^3-(C-B)(v_0-gt\sin\alpha)g^2t^2\cos^2\alpha\right]\alpha' \\
&\qquad +[D(v_0-gt\sin\alpha)^2+Eg^2t^2\cos^2\alpha]\frac{d\alpha'}{dt}\Big\}.
\end{aligned}$$

Des valeurs de $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ et $\frac{d^2z_1}{dt^2}$, on conclut, au premier ordre près, que

$$\cos\alpha\frac{d^2x_1}{dt^2}+\sin\alpha\frac{d^2z_1}{dt^2}=-3\varepsilon\left[\frac{A}{3}(v_0-gt\sin\alpha)^3+B(v_0-\sin\alpha)g^2t^2\cos^2\alpha\right],$$

$$\sin\alpha\frac{d^2x_1}{dt^2}-\cos\alpha\frac{d^2z_1}{dt^2}=-3\varepsilon[B(v_0-gt\sin\alpha)^2+Cg^2t^2\cos^2\alpha]gt\cos\alpha.$$

D'où l'on déduit, en intégrant,

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha \frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha \frac{dz_1}{dt} \\
&\quad = -3\varepsilon t\left[\frac{A}{3}v_0^3 - \frac{1}{2}A v_0^2 gt\sin\alpha + \frac{1}{3}(A\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha)v_0 g^2 t^2\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{1}{4}\left(\frac{A}{3}\sin^2\alpha + B\cos^2\alpha\right)g^3 t^3 \sin\alpha\right], \\
&\sin\alpha \frac{dx_1}{dt} - \cos\alpha \frac{dz_1}{dt} \\
&\quad = -3\varepsilon g t^2 \cos\alpha\left[\frac{1}{2}B v_0^2 - \frac{2}{3}B v_0 gt\sin\alpha + \frac{1}{4}(B\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha)g^2 t^2\right].
\end{aligned}$$

Ce sont ces valeurs qu'il faut porter dans $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ et $\frac{d^2z_1}{dt^2}$, car par là on ne néglige que des termes qui contiennent ε en facteur à des puissances supérieures à la deuxième.

a''_1 et $\frac{da''_1}{dt}$ étant des fonctions connues du temps, on est en mesure d'avoir x_1 et z_1 et par suite x et z.

9. Considérons la valeur de $\frac{d^2y}{dt^2}$. Cette valeur prouve qu'il y a une dérivation et que cette dérivation est une conséquence de la rotation du solide autour de la verticale qui passe par le centre de gravité. On a vu que a' et $\frac{da'}{dt}$ changent de signe en même temps que ω; on en conclut que la dérivation change de sens en même temps que la rotation du solide autour de son axe de figure.

La grandeur et le sens de la dérivation correspondant à une vitesse donnée dépendent d'ailleurs de la forme, des dimensions et du poids du projectile.

10. Il est facile de voir ce que sont à peu près les coefficients A, B, C, D, E pour les projectiles employés dans l'artillerie.

Ces projectiles sont formés d'un cylindre creux surmonté d'un solide de forme ogivale, de hauteur moindre que le cylindre, et terminé en avant par une face plane dont le rayon est à peu près la moitié de celui du cylindre. Cette partie ogivale est à peu près pleine; elle

présente seulement une ouverture semblable au goulot d'une bouteille par laquelle on introduit de la poudre dans l'intérieur du boulet. Il résulte de cette disposition que le centre de gravité est plus près de la partie antérieure que si le projectile était plein. Le centre de poussée se trouvant alors en arrière du centre de gravité, μ est négatif.

D'autre part, les normales aux différents points de l'ogive font toutes des angles très-grands avec l'axe; donc X, qui représente le cosinus d'un quelconque de ces angles, est très-petit sur toute la surface ogivale. Examinons maintenant les coefficients.

$A = \Sigma X^4\, ds$ se compose des surfaces des deux bases et d'une partie correspondant à la surface ogivale; cette partie est très-petite, parce que tous les éléments qui la forment sont multipliés par X^4.

$B = \Sigma X^2 Y^2 ds$ correspond seulement à la partie ogivale; c'est un terme très-petit, parce que les éléments contiennent X^2 en facteur.

$C = \Sigma Y^2 Z^2 ds$ correspond à la surface cylindrique et à la surface ogivale. La valeur de C est du même ordre de grandeur que celle de A; c'est une fraction finie de la surface convexe du projectile.

$D = \Sigma X^2 Y (Yx' - Xy')\, ds$ correspond à la surface ogivale seulement. La valeur de ce coefficient dépend à la fois de la position du centre de gravité et de la surface de la partie ogivale. Cette valeur peut être positive ou négative, mais elle est toujours très-petite, les éléments qui la forment contenant tous X^2 ou X^3 en facteur.

$E = \Sigma Y Z^2 (Yx' - Xy')\, ds$ se compose d'une partie négative qui n'a de valeur que pour la partie ogivale, et d'une autre $\Sigma Y^2 Z^2 x' ds$, dont la valeur et le signe dépendent à la fois de la position du centre de gravité et de la surface convexe du projectile. Si le centre de gravité coïncidait avec le centre de gravité de la surface convexe, on aurait $\Sigma x' ds = 0$. Je dis que, dans cette hypothèse, $\Sigma Y^2 Z^2 x' ds$ est négatif. En effet, si l'on appelle σ la différentielle de l'arc de méridien mené par un point donné, ρ le rayon du parallèle qui passe par ce point, φ l'angle que la normale fait avec l'axe, et θ l'angle du méridien avec le plan $y' O x'$, on a

$$\Sigma Y^2 Z^2 x' ds = \Sigma \sin^4\varphi \cos^2\theta \sin^2\theta . \rho x' d\theta . \sigma$$

ou

$$\Sigma Y^2 Z^2 x' ds = \frac{1}{4}\pi \int \sin^4\varphi . \rho x' \sigma.$$

Or $2\pi \int \rho\sigma x'$ représente le moment de la surface convexe par rapport à l'origine ; si l'origine est le centre de gravité de cette surface, on a

$$\int \rho\sigma x' = 0.$$

Or $\sin\varphi = 1$ pour la surface convexe du cylindre ; les éléments diminués sont donc ceux qui correspondent à la surface ogivale : ces éléments sont positifs ; il en résulte que $\int \sin^4\varphi . \rho x' \sigma$ est négatif, et par suite aussi $\Sigma Y^2 Z^2 x' ds$. J'ai raisonné dans l'hypothèse que le centre de gravité de la surface convexe coïncide avec le centre de gravité du solide ; en réalité, le centre de gravité du solide se trouve en avant du centre de gravité de la surface convexe. Soit a la distance de ces deux points. Pour passer de la valeur $\Sigma Y^2 Z^2 x' ds$, correspondant au centre de gravité de la surface, à celle qui convient au centre de gravité du solide, il faut remplacer x' par $x' - a$; cela revient à ajouter à l'expression qui précède le terme négatif $-a\Sigma Y^2 Z^2 ds$.

Donc, en définitive, E est négatif.

Nous sommes en mesure maintenant de déterminer les sens des différents mouvements du projectile. Pour cela, nous supposerons que B et D sont nuls, et que E est négatif. A et C sont d'ailleurs essentiellement positifs.

La rayure des canons tournant de gauche à droite dans la partie supérieure pour un observateur placé à la culasse, il en résulte que ω est négatif. De plus, c'est un très-grand nombre ; je prendrai donc les formules qui conviennent à ce cas.

Le mouvement de nutation est déterminé par la formule

$$\psi = -\frac{1}{l^2\omega}\left(\mu t + \frac{3}{4}\varepsilon \mathrm{E} \cos^2\alpha . g^3 t^4\right);$$

μ et E étant négatifs, il en résulte que ψ a le signe de ω, c'est-à-dire

qu'il est négatif. Donc l'axe du projectile est dévié à gauche du plan initial du tir.

Le changement d'obliquité de l'axe par rapport à la verticale est déterminé par la formule

$$a''_1 = \frac{l'^2 \cos^2\alpha}{l^4 \omega^2} (\mu + 3\varepsilon \mathrm{E} g^3 t^4 \cos^2\alpha);$$

il en résulte que a''_1 est négatif. Le cosinus de l'angle que l'axe fait avec la verticale diminuant, il en résulte que la partie antérieure du projectile s'abaisse constamment.

Enfin, la dérivation est définie par la formule

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -3\varepsilon \left\{ \left[\frac{\mathrm{A}}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^3 - \mathrm{C}(v_0 - gt\sin\alpha) g^2 t^2 \cos^2\alpha \right] a' \right.$$
$$\left. + \mathrm{E} g^2 t^2 \cos^2\alpha \frac{da'}{dt} \right\}.$$

Le multiplicateur de a' reste positif pendant toute la durée du mouvement, si, comme il faut le supposer, v_0 est grand; parce qu'alors $\frac{\mathrm{A}}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^2$ dépasse $\mathrm{C} g^2 t^2 \cos^2\alpha$; le second terme est positif, mais il est beaucoup plus petit que le premier, parce que le multiplicateur de $\frac{da'}{dt}$ ne contient pas v_0.

La dérivation a donc le signe du premier terme, c'est-à-dire le signe positif. Il résulte de là que le projectile se déplace vers la droite du plan du tir.

Tous ces résultats sont d'accord avec l'expérience.

Remarque. — Il arrive souvent que la dérivation se produit d'abord à gauche, puis, quelque temps après, elle se fait vers la droite. La formule de la dérivation rend très-bien compte de cette circonstance. J'ai supposé que D était nul. Cela n'a pas lieu en général. Si l'on suppose D positif, mais toujours très-petit, comme dans la valeur de a', il est multiplié par v_0^2; a' sera d'abord positif, puis, t augmentant, il deviendra négatif. Donc le projectile se tourne d'abord vers la droite, puis vers la gauche. Il s'ensuit que la dérivation se fait d'abord vers la gauche, puis vers la droite.

11. Il conviendrait maintenant de chercher la valeur numérique de la dérivation en prenant pour projectile un des boulets en usage dans l'artillerie, et pour lesquels il existe des tables de dérivation. Il m'a manqué pour cela de connaître la position du centre de gravité et les rayons de giration. Le profil intérieur du boulet est trop compliqué pour qu'il y ait lieu de chercher ces quantités par la géométrie, d'autant plus que la poudre qui remplit le boulet et les ailettes qui en garnissent la surface déplacent un peu le centre de gravité et changent les rayons de giration.

12. Je prends pour projectile un cylindre creux en fonte, de poids spécifique égal à 7 et ayant le même poids et à peu près les mêmes dimensions que le boulet de 12. Voici les dimensions :

Rayon de base extérieure	$R = 0^{m},059$
Rayon de base intérieure	$r = 0,04075$
Hauteur du cylindre	$H = 0,2$
Épaisseur de la paroi antérieure	$e = 0,0518$
Épaisseur de la paroi postérieure	$e' = 0,019$
On trouve pour le poids	$P = 10^{kil},825$

Le centre de gravité est à $0^{m},10811$ de la base postérieure, ou bien à $0^{m},00811$ en avant du point milieu de l'axe. Les coefficients à calculer sont

$$l^2,\quad l'^2,\quad A = 2\pi R^2,\quad C = \frac{1}{4}\pi RH,\quad E = \frac{1}{4}\pi RHd,\quad \mu = \frac{\varpi g d}{P},\quad \varepsilon \text{ et } \omega.$$

Le coefficient ε se déduit des expériences de balistique faites sur des boulets sphériques. On a trouvé que la résistance de l'air sur un boulet sphérique de rayon R et animé de la vitesse v était

$$F = \frac{1}{7100}\pi R^2 v^2.$$

Je vais chercher une autre expression de cette force. Je prends pour axe des x la tangente à la trajectoire décrite par le centre de gravité; la vitesse normale d'un élément de surface ds étant vX, la résistance élémentaire est alors en valeur absolue

$$\varepsilon M v^2 X^2 ds,$$

et la composante de cette force parallèle à l'axe des x est

$$-\varepsilon M v^3 X^4 ds$$

en grandeur et en signe. La résistance totale est alors

$$-\varepsilon M v^3 \Sigma X^4 ds,$$

le signe Σ s'étendant à toute la surface de la sphère.

Soient ω l'angle que la normale fait avec l'axe de x, et θ l'angle que fait avec yox le plan méridien mené par le point considéré ; on trouve aisément que

$$ds = R^2 \sin\omega \, d\omega \, d\theta.$$

Donc la résistance a pour valeur

$$-\varepsilon M v^3 R^2 \Sigma \cos^4\omega \sin\omega \, d\omega \, d\theta,$$

l'intégration par rapport à θ devant être faite entre les limites o et 2π, et l'intégration par rapport à ω entre les limites o et π.

On obtient ainsi

$$-\frac{4}{5}\pi R^2 \varepsilon M v^3.$$

On a donc l'égalité

$$\frac{4}{5}\pi R^2 \varepsilon M v^3 = \frac{1}{7100}\pi R^2 v^3,$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{1}{5680 M} = \frac{g}{5680 P}.$$

Le coefficient ω dépend de la vitesse initiale et de l'hélice du canon rayé. Dans le canon rayé de 12, le pas de l'hélice suivie par les ailettes est de 3 mètres. Ainsi, quand le boulet avance de 3 mètres, il fait un tour sur lui-même, il en résulte la vitesse de rotation $\omega = -\frac{2\pi}{3} v_0$.

La vitesse initiale v_0 est le plus souvent 307 mètres : c'est celle qu'on obtient avec une charge de 1 kilogramme de poudre.

Voici le tableau des valeurs numériques des coefficients :

$$d = -0{,}00811, \quad \log l^2 = \bar{3}{,}32583, \quad \log l'^2 = \bar{3}{,}72039,$$
$$\log A = \bar{2}{,}33988, \quad \log C = \bar{3}{,}96697, \quad \log(-E) = \bar{5}{,}87599,$$
$$\log(-\mu) = \bar{5}{,}31768, \quad \log\varepsilon = \bar{4}{,}20283, \quad \log(-\omega) = 2{,}80820,$$
$$v_0 = 307, \quad \omega = -643.$$

13. Je calcule maintenant les différents mouvements du projectile.

1° Mouvement de nutation.

La durée d'une révolution de l'axe vrai autour de l'axe moyen est

$$-\frac{2\pi l'^2}{l^2\omega};$$

on trouve pour cette valeur $0^s,02424$.

Le rayon du cercle de nutation est

$$-\frac{l'^2}{l^4\omega^2}\mu\cos\alpha;$$

l'angle du cône de nutation, évalué en secondes, est alors

$$-\frac{l'^2}{l^4\omega^2}\frac{\mu\cos\alpha}{\sin 1''}.$$

On trouve pour cette valeur

$$0'',01214\cos\alpha.$$

On voit par là que le mouvement de nutation est tout à fait insensible. On est donc en droit de le négliger.

2° Mouvement de précession.

La formule est

$$\psi = -\frac{1}{l^2\omega}\left(\mu t + \frac{3}{4}\varepsilon E g^3 t^4 \cos^2\alpha\right)\frac{1}{\sin 1''}.$$

Je prends l'angle de tir $\alpha = 16°$. Il vient alors

$$\psi = -t\,\mathrm{Nl}\,0,49808 - t^4\,\mathrm{Nl}\,\bar{1},32477,$$

en représentant par $\mathrm{Nl}\,a$ le nombre dont le logarithme est a. Si l'on donne à t les valeurs

$$5^s,\quad 10^s,\quad 15^s,$$

on trouve pour ψ les valeurs

$$-2'\,27'',75,\quad -35'\,43'',9,\quad -2°\,59',1.$$

3° Variation de l'obliquité de l'axe sur la verticale.

En appelant θ l'accroissement de l'angle que l'axe fait avec la verticale, on a

$$\cos(90 - \alpha + \theta) = \sin\alpha + a''_1.$$

On en déduit

$$\theta = -\frac{a''_1}{\cos\alpha}.$$

Donc

$$\theta = -\frac{l'^2\cos\alpha}{l^4\omega^2}(\mu + 3\varepsilon E g^3 t^3 \cos^3\alpha).$$

On doit négliger le terme $-\frac{l'^2\cos\alpha}{l^4\omega^2}\mu$, qui n'est autre que le rayon du cercle de nutation ; il vient alors, en évaluant θ en secondes,

$$\theta = -\frac{3\,l'^2}{l^4\omega^2}\,\frac{\varepsilon E g^3 \cos^3\alpha}{\sin 1''}\,t^3 \quad \text{ou} \quad \theta = t^3 \mathrm{N}\,\bar{1}\bar{2},24604.$$

Si l'on fait $t = 15^s$, on trouve $\theta = 54'',88$.

On voit que la variation d'obliquité de l'axe reste toujours très-petite ; il en résulte qu'on pourra la négliger dans le calcul de x_1 et z_1.

4° Dérivation.

La formule de la dérivation devient pour le projectile considéré, en y remplaçant a et $\frac{da'}{dt}$ par leurs valeurs dans lesquelles on a supprimé les termes périodiques,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = 3\varepsilon \Big\{ &\left[\frac{A}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^3 - C(v_0 - gt\sin\alpha)g^2t^2\cos^2\alpha\right] \\ &\times \frac{\cos\alpha}{l^2\omega}\left(\mu t + \frac{3}{4}\varepsilon E\cos^3\alpha\, g^3 t^4\right) \\ &+ E g^2 t^2 \cos^2\alpha\,\frac{1}{l^2\omega}(\mu + 3\varepsilon E\cos^3\alpha\, g^3 t^3)\Big\},\end{aligned}$$

ou bien, en développant,

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{9}{4}\,\frac{\varepsilon^2 E g^3\cos^3\alpha}{l^2\omega}&\Big[\frac{A}{3}v_0^3 t^4 - A v_0^2 g t^5\sin\alpha + (A\sin^2\alpha - C\cos^2\alpha)v_0 g^2 t^6 \\ &- \left(\frac{A}{3}\sin^2\alpha - C\cos^2\alpha\right)g^3 t^7\sin\alpha + 4 E g^2 t^5\cos^2\alpha\Big] \\ + \frac{3\varepsilon\mu\cos\alpha}{l^2\omega}&\Big[\frac{A}{3}v_0^3 t - A v_0^2 g t^2\sin\alpha + (A\sin^2\alpha - C\cos^2\alpha)v_0 g^2 t^3 \\ &- \left(\frac{A}{3}\sin^2\alpha - C\cos^2\alpha\right)g^3 t^4\sin\alpha + E g^2 t^2\cos^2\alpha\Big].\end{aligned}$$

En intégrant on obtient successivement

$$\frac{dy}{dt}=\frac{9}{4}\,\frac{\varepsilon^2\mathrm{E}g^3\cos^3\alpha}{l^2\omega}\Big[\frac{\mathrm{A}}{15}v_0^3t^5-\frac{1}{6}\mathrm{A}\,v_0^2gt^6\sin\alpha+\frac{1}{7}(\mathrm{A}\sin^2\alpha-\mathrm{C}\cos^2\alpha)v_0g^2t^7$$
$$-\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{A}}{3}\sin^2\alpha-\mathrm{C}\cos^2\alpha\right)g^3t^8\sin\alpha+\frac{2}{3}\mathrm{E}g^2t^6\cos^2\alpha\Big]$$
$$+\frac{3\varepsilon\mu\cos\alpha}{l^2\omega}\Big[\frac{\mathrm{A}}{6}v_0^3t^2-\frac{1}{3}\mathrm{A}\,v_0^2gt^3\sin\alpha+\frac{1}{4}(\mathrm{A}\sin^2\alpha-\mathrm{C}\cos^2\alpha)v_0g^2t^4$$
$$-\frac{1}{5}\left(\frac{\mathrm{A}}{3}\sin^2\alpha-\mathrm{C}\cos^2\alpha\right)g^3t^5\sin\alpha+\frac{1}{3}\mathrm{E}g^2t^3\cos^3\alpha\Big],$$

$$y=\frac{9}{4}\,\frac{\varepsilon^2\mathrm{E}g^3\cos^3\alpha}{l^2\omega}\Big[\frac{1}{90}\mathrm{A}v_0^3t^6-\frac{1}{42}\mathrm{A}v_0^2gt^7\sin\alpha+\frac{1}{56}(\mathrm{A}\sin^2\alpha-\mathrm{C}\cos^2\alpha)v_0g^2t^8$$
$$-\frac{1}{72}\left(\frac{\mathrm{A}}{3}\sin^2\alpha-\mathrm{C}\cos^2\alpha\right)g^3t^9\sin\alpha+\frac{2}{21}\mathrm{E}g^2t^7\cos^2\alpha\Big]$$
$$+\frac{3\varepsilon\mu\cos\alpha}{l^2\omega}\Big[\frac{\mathrm{A}}{18}v_0^3t^3-\frac{1}{12}\mathrm{A}v_0^2gt^4\sin\alpha+\frac{1}{20}(\mathrm{A}\sin^2\alpha-\mathrm{C}\cos^2\alpha)v_0g^2t^5$$
$$-\frac{1}{30}\left(\frac{\mathrm{A}}{3}\sin^2\alpha-\mathrm{C}\cos^2\alpha\right)g^3t^6\sin\alpha+\frac{1}{12}\mathrm{E}g^2t^4\cos^3\alpha\Big].$$

En remplaçant les coefficients par leurs valeurs numériques, on obtient

$$y=t^6\mathrm{Nl}\,\overline{5},27021-t^7\mathrm{Nl}\,\overline{7},54601-t^8\mathrm{Nl}\,\overline{9},98427+t^9\mathrm{Nl}\,\overline{11},88460-t^7\mathrm{Nl}\,\overline{13},26923$$
$$+t^3\mathrm{Nl}\,\overline{3},39247-t^4\mathrm{Nl}\,\overline{6},51337$$
$$-t^5\mathrm{Nl}\,\overline{8},85472+t^6\mathrm{Nl}\,\overline{10},68810-t^4\mathrm{Nl}\,\overline{12},39247.$$

Si l'on donne à t les valeurs

$$5^s,\quad 10^s,\quad 11^s,\quad 14^s,$$

on trouve pour y les valeurs

$$0^m,57,\quad 16^m,5,\quad 27^m,5,\quad 98^m,3.$$

Projection de la trajectoire sur le plan zox.

14. La projection de la trajectoire du centre de gravité sur le plan zox est déterminée par les valeurs de x et z. Dans les formules

en $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ et $\frac{d^2z_1}{dt^2}$ du n° 8 (p. 45-46), je fais

$$B = 0 \quad \text{et} \quad D = 0;$$

j'obtiens alors

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2} = -3\varepsilon \Big\{ & \frac{A}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^3\cos\alpha + C g^3 t^3 \sin\alpha\cos^3\alpha \\ & + A(v_0 - gt\sin\alpha)^2\cos\alpha\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right) \\ & - 3C g^2 t^2 \sin\alpha\cos^2\alpha\left(\cos\alpha\frac{dz_1}{dt} - \sin\alpha\frac{dx_1}{dt}\right) \\ & + \Big[3C(v_0 - gt\sin\alpha)g^2t^2\sin\alpha\cos\alpha + C g^3 t^3\cos^3\alpha \\ & \quad - \frac{A}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)\operatorname{tang}\alpha - A(v_0 - gt\sin\alpha)^2 gt\cos\alpha\Big] a''_1 \\ & - 3E g^2 t^2 \sin\alpha\cos\alpha\frac{da''_1}{dt}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z_1}{dt^2} = -3\varepsilon \Big\{ & \frac{A}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^3\sin\alpha - C g^3 t^3 \cos^4\alpha \\ & + A(v_0 - gt\sin\alpha)^2\sin\alpha\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right) \\ & + 3C g^2 t^2 \cos^3\alpha\left(\cos\alpha\frac{dz_1}{dt} - \sin\alpha\frac{dx_1}{dt}\right) \\ & + \Big[-3C(v_0 - gt\sin\alpha)g^2t^2\cos^2\alpha + C g^3 t^3\cos^2\alpha\sin\alpha \\ & \quad + \frac{A}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^3 - A(v_0 - gt\sin\alpha)^2 gt\sin\alpha\Big] a''_1 \\ & + 3E g^2 t^2 \cos^2\alpha\frac{da''_1}{dt}\Big\}.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin\alpha\frac{d^2z_1}{dt^2} \\ &= -3\varepsilon\Big\{\frac{A}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^3 + A(v_0 - gt\sin\alpha)^2\left(\cos\alpha\frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha\frac{dz_1}{dt}\right) \\ &\qquad + \left[C g^3 t^3\cos^2\alpha - A(v_0 - gt\sin\alpha)^2 gt\right]a''_1\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos\alpha\frac{d^2z_1}{dt^2} - \sin\alpha\frac{d^2x_1}{dt^2} \\ &= -3\varepsilon\Big\{-C g^3 t^3\cos^3\alpha + 3C g^2 t^2\cos^2\alpha\left(\cos\alpha\frac{dz_1}{dt} - \sin\alpha\frac{dx_1}{dt}\right) \\ &\qquad + \left[-3C(v_0 - gt\sin\alpha)g^2t^2\cos\alpha + \frac{A}{3}(v_0 - gt\sin\alpha)^3\frac{1}{\cos\alpha}\right]a''_1 \\ &\qquad + 3E g^2 t^2\cos\alpha\frac{da''_1}{dt}\Big\}.\end{aligned}$$

En ne prenant que les termes du premier ordre, on obtient

$$\cos\alpha \frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin\alpha \frac{d^2z_1}{dt^2} = -\varepsilon A(v_0 - gt\sin\alpha)^3,$$

$$\cos\alpha \frac{d^2z_1}{dt^2} - \sin\alpha \frac{d^2x_1}{dt^2} = +3\varepsilon C g^2 t^2 \cos^3\alpha;$$

d'où, en intégrant,

$$\cos\alpha \frac{dx_1}{dt} + \sin\alpha \frac{dz_1}{dt}$$
$$= -\varepsilon A\left[v_0^3 t - \frac{3}{2} v_0^2 g t^2 \sin\alpha + v_0 g^2 t^3 \sin^2\alpha - \frac{1}{4} g^3 t^4 \sin^3\alpha\right],$$
$$\cos\alpha \frac{dz_1}{dt} - \sin\alpha \frac{dx_1}{dt} = +\frac{3}{4}\varepsilon C g^3 t^4 \cos^3\alpha.$$

Ce sont ces valeurs qu'il faut porter dans les équations qui précèdent, car par là on ne néglige que des termes du troisième ordre.

Je remarque en outre que a''_1 et $\frac{da''_1}{dt}$, qui entrent comme facteurs dans plusieurs termes, restent extrêmement petits pendant toute la durée du trajet, puisque, d'après le calcul fait plus haut, l'accroissement de l'angle que l'axe de figure du projectile fait avec la verticale n'atteint pas une minute. On peut donc, sans erreur sensible, supprimer les termes qui contiennent a''_1 et $\frac{da''_1}{dt}$ en facteurs; il vient alors après réduction

$$\cos\alpha \frac{d^2x_1}{dt^2} + \sin\alpha \frac{d^2z_1}{dt^2}$$
$$= -\varepsilon A[v_0^3 - 3v_0^2 gt\sin\alpha + 3v_0 g^2 t^2 \sin^2\alpha - g^3 t^3 \sin^3\alpha]$$
$$+ 3\varepsilon^2 A^2\left[v_0^5 t - \frac{7}{2} v_0^4 g t^2 \sin\alpha + 5 v_0^3 g^2 t^3 \sin^2\alpha\right.$$
$$\left. - \frac{15}{2} v_0^2 g^3 t^4 \sin^3\alpha + \frac{3}{2} v_0 g^4 t^5 \sin^4\alpha - \frac{1}{4} g^5 t^6 \sin^5\alpha\right],$$

$$\cos\alpha \frac{d^2z_1}{dt^2} - \sin\alpha \frac{d^2x_1}{dt^2} = 3\varepsilon C g^3 t^3 \cos^3\alpha - \frac{27}{4}\varepsilon^2 C^2 g^5 t^6 \cos^5\alpha.$$

On a d'ailleurs, p. 17,

$$x = v_0 t \cos\alpha + x_1, \quad \text{et} \quad z = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + z_1;$$

donc

$$x\cos\alpha + z\sin\alpha = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha + x_1\cos\alpha + z_1\sin\alpha,$$

$$z\cos\alpha + x\sin\alpha = -\frac{1}{2} g t^2 \cos\alpha + z_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha.$$

On obtient alors, en intégrant les équations qui précèdent.

$$(1)\left\{\begin{aligned} x\cos\alpha + z\sin\alpha = {} & v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \sin\alpha \\ & - \varepsilon A\left(\frac{1}{2} v_0^3 t^2 - \frac{1}{2} v_0^2 g t^3 \sin\alpha + \frac{1}{4} v_0 g^2 t^4 \sin^2\alpha - \frac{1}{20} g^3 t^5 \sin^3\alpha\right) \\ & + 3\varepsilon^2 A^2 \left(\frac{1}{6} v_0^5 t^3 - \frac{7}{24} v_0^4 g t^4 \sin\alpha + \frac{1}{4} v_0^3 g^2 t^5 \sin^2\alpha \right. \\ & \left. \qquad - \frac{1}{4} v_0^2 g^3 t^6 \sin^3\alpha + \frac{1}{28} v_0 g^4 t^7 \sin^4\alpha - \frac{1}{224} g^5 t^8 \sin^5\alpha\right), \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad z\cos\alpha - x\sin\alpha = -\frac{1}{2} g t^2 \cos\alpha + \frac{3}{20}\varepsilon C g^3 t^5 \cos^3\alpha - \frac{27}{224}\varepsilon^2 C^2 g^5 t^8 \cos^5\alpha.$$

Dans l'exemple numérique que j'ai choisi, si l'on donne à t une valeur de plus d'une seconde, on reconnaît que les termes du deuxième membre de l'équation (1) vont en croissant. Ce deuxième membre ne donne donc pas une valeur approchée de $x\cos\alpha + z\sin\alpha$, puisque les termes négligés sont plus grands que les termes conservés. Il est donc nécessaire de trouver par un autre procédé une valeur approchée de $x\cos\alpha + z\sin\alpha$.

15. Les deuxièmes membres des équations (1) et (2) ne dépendent pas de la rotation du solide autour de son centre de gravité. Il en résulte que, si l'on cherchait le mouvement du solide dans l'hypothèse où il se déplacerait parallèlement à lui-même, on devrait obtenir les valeurs précédentes (1) et (2). Je cherche les équations du mouvement qui conviennent à ce cas.

Je fais donc

$$\begin{array}{llll} a = \cos\alpha, & a' = 0, & a'' = \sin\alpha, & \\ b = 0, & b' = 1, & b'' = 0, & \\ c = -\sin\alpha, & c' = 0, & c'' = \cos\alpha, & \\ \omega = 0, & p = 0, & q = 0, & r = 0. \end{array}$$

Les valeurs de u, u', u'' du n° 1 (p. 34) deviennent

$$u = \cos\alpha \frac{dx}{dt} + \sin\alpha \frac{dz}{dt},$$
$$u' = 0,$$
$$u'' = -\sin\alpha \frac{dx}{dt} + \cos\alpha \frac{dz}{dt},$$

puis

$$\Sigma V^3 X\, ds = A u^3 + 3 B u u''^2,$$
$$\Sigma V^3 Y\, ds = 0,$$
$$\Sigma V^3 Z\, ds = 3 C u''^3 + 3 B u^2 u''.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations en $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$ du n° 1 (p. 34), on obtient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varepsilon[\cos\alpha(Au^3 + 3Buu''^2) - \sin\alpha(3Cu''^3 + 3Bu^2u'')]$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \varepsilon[\sin\alpha(Au^3 + 3Bu''^2u) + \cos\alpha(3Cu''^3 + 3Bu^2u'')],$$

d'où l'on déduit

$$\cos\alpha \frac{d^2x}{dt^2} + \sin\alpha \frac{d^2z}{dt^2} = -g\sin\alpha - \varepsilon(Au^3 + 3Bu''^2u),$$
$$\cos\alpha \frac{d^2z}{dt^2} - \sin\alpha \frac{d^2x}{dt^2} = -g\cos\alpha - 3\varepsilon(Cu''^3 + Bu^2u''),$$

ou plus simplement

$$\frac{du}{dt} = -g\sin\alpha - \varepsilon(Au^3 + 3Bu''^2u),$$
$$\frac{du''}{dt} = -g\cos\alpha - 3\varepsilon(Cu''^3 + Bu^2u'').$$

Telles sont les deux équations qui définissent le mouvement du centre de gravité dans l'hypothèse que j'ai faite.

Le projectile étant cylindrique, $B = 0$, et l'on obtient

$$\frac{du}{dt} = -g\sin\alpha - \varepsilon A u^3,$$
$$\frac{du''}{dt} = -g\cos\alpha - 3\varepsilon C u''^3.$$

16. Je suppose qu'on ait intégré ces équations rigoureusement, et qu'on en ait déduit

$$x\cos\alpha + z\sin\alpha = F(t, \varepsilon),$$
$$z\cos\alpha - x\sin\alpha = F_1(t, \varepsilon).$$

Il devra arriver qu'en développant $F(t, \varepsilon)$, $F_1(t, \varepsilon)$ en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de ε, les premiers termes de ces développements forment les deuxièmes membres des équations (1) et (2), de sorte que ces deuxièmes membres ne représentent que des valeurs approchées de $F(t, \varepsilon)$, $F_1(t, \varepsilon)$. Cela suppose que les développements de ces fonctions en séries sont convergents; si donc il arrive que pour certaines valeurs des coefficients et du temps, un des deuxièmes membres des équations (1) et (2) devient divergent, il ne pourra plus remplacer la fonction $F(t, \varepsilon)$ ou $F_1(t, \varepsilon)$, et par suite il ne pourra plus servir au calcul des inconnues.

Or, dans l'exemple numérique que j'ai choisi, les termes du deuxième membre de l'équation (1) vont en croissant quand le temps dépasse une seconde, tandis qu'au contraire les termes du deuxième membre de l'équation (2) diminuent très-rapidement pour toutes les valeurs du temps inférieures à 15 secondes qui représentent une limite supérieure de la durée du trajet. Donc on pourra conserver l'équation (2) pour le calcul des inconnues, mais il faudra remplacer l'équation (1) par l'intégrale de l'équation $\frac{du}{dt} = -g\sin\alpha - \varepsilon A u^3$.

17. J'ai donc à intégrer l'équation

$$\frac{du}{dt} = -g\sin\alpha - \varepsilon A u^3.$$

Cette équation donne

$$dt = -\frac{du}{g\sin\alpha + ku^3},$$

en remplaçant εA par k, équation qui peut s'écrire

$$g\sin\alpha\, dt = -\frac{du}{1 + \frac{k}{g\sin\alpha} u^3}.$$

Je pose $u\sqrt[3]{\dfrac{k}{g\sin\alpha}} = w$, et l'équation devient

$$\sqrt[3]{kg^2\sin\alpha}\,dt = -\frac{dw}{1+w^3}.$$

D'ailleurs

$$dx\cos\alpha + dz\sin\alpha = u\,dt = \sqrt[3]{\frac{g\sin\alpha}{k}}\,w\,dt.$$

Si, de cette relation, je tire la valeur de dt et que je la porte dans l'équation qui précède, j'obtiendrai

$$\sqrt[3]{k^2 g\sin\alpha}\,(dx\cos\alpha + dz\sin\alpha) = -\frac{w\,dw}{1+w^3}.$$

Ainsi l'équation différentielle à intégrer peut être remplacée par les deux équations suivantes :

$$\sqrt[3]{kg^2\sin^2\alpha}\,dt = -\frac{dw}{1+w^3},$$

$$\sqrt[3]{k^2 g\sin\alpha}\,(dx\cos\alpha + dz\sin\alpha) = -\frac{w\,dw}{1+w^3},$$

ou bien

$$-3\sqrt[3]{kg^2\sin^2\alpha}\,dt = \frac{dw}{1+w} - \frac{1}{2}\frac{(2w-1)\,dw}{w^2-w+1} + \sqrt{3}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dw}{1+\left(\frac{2w-1}{\sqrt{3}}\right)^2},$$

$$3\sqrt[3]{k^2 g\sin\alpha}\,(dx\cos\alpha + dz\sin\alpha) = \frac{dw}{1+w} - \frac{1}{2}\frac{(2w-1)\,dw}{w^2-w+1} - \sqrt{3}\,\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dw}{1+\left(\frac{2w-1}{\sqrt{3}}\right)^2};$$

d'où l'on déduit, en intégrant,

$$3t\sqrt[3]{kg^2\sin^2\alpha} = \mathrm{C} - \sqrt{3}\,\text{arc tang}\,\frac{2w-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\mathrm{M}}\log\frac{1+w}{\sqrt{w^2-w+1}},$$

$$3\sqrt[3]{k^2 g\sin\alpha}\,(x\cos\alpha + z\sin\alpha) = \mathrm{C}' - \sqrt{3}\,\text{arc tang}\,\frac{2w-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\mathrm{M}}\log\frac{1+w}{\sqrt{w^2-w+1}}.$$

Dans ces équations $\frac{1}{\mathrm{M}}$ représente l'inverse du module, c'est-à-dire le nombre 2,30259, et C et C′ deux constantes arbitraires. La valeur

initiale de u est v_0; par suite celle de ϖ est $\varpi_0 = v_0 \sqrt[3]{\dfrac{k}{g \sin\alpha}}$. Avec les données numériques que j'ai choisies, on obtient

$$\varpi_0 = 3,3424.$$

Les constantes C et C′ se déterminent par la condition que pour $t = 0$ on ait

$$\varpi = 3,3424 \quad \text{et} \quad x\cos\alpha + z\sin\alpha = 0;$$

on obtient ainsi

$$C = 2,5878, \quad C' = 1,8290.$$

Si de la première des deux équations on pouvait tirer la valeur de ϖ, en la portant dans la deuxième équation, on aurait pour $x\cos\alpha + z\sin\alpha$ l'expression que j'ai appelée $F(t, \varepsilon)$ et qui, développée suivant les puissances croissantes de ε, donnerait pour premiers termes le deuxième membre de l'équation (1). Cette élimination de ϖ ne peut pas se faire. On est alors obligé de conserver les deux équations à la fois en y regardant ϖ comme une variable auxiliaire.

On pourrait intégrer de même l'équation

$$\frac{du''}{dt} = -g\cos\alpha - 3\varepsilon C u''^3.$$

Mais comme le développement de $z\cos\alpha - x\sin\alpha$ en série est convergent, il est plus commode de le conserver. L'équation permet d'ailleurs d'avoir autant de termes que l'on veut.

Intégrant donc par approximations successives, en tenant compte de ce que pour $t = 0$ on a $u'' = 0$, on obtient, en posant $3\varepsilon C = k''$,

$$\begin{aligned} u'' = &- gt\cos\alpha + \frac{1}{4}k'' g^3 t^4 \cos^3\alpha - \frac{3}{28}k''^2 g^5 t^7 \cos^5\alpha \\ &+ \frac{57}{1120}k''^3 g^7 t^{10}\cos^7\alpha - \frac{737}{29120}k''^4 g^9 t^{13}\cos^9\alpha + \ldots; \end{aligned}$$

d'où, en intégrant,

$$\begin{aligned} z\cos\alpha - x\sin\alpha = &- \frac{1}{2}gt^2\cos\alpha + \frac{1}{20}k'' g^3 t^5\cos^3\alpha - \frac{3}{224}k''^2 g^5 t^8\cos^5\alpha \\ &+ \frac{57}{12320}k''^3 g^7 t^{11}\cos^7\alpha - \frac{737}{407680}k''^4 g^9 t^{14}\cos^9\alpha + \ldots \end{aligned}$$

On reconnait que les trois premiers termes de ce développement forment bien le deuxième membre de l'équation (2).

18. Le mouvement du centre de gravité en projection sur le plan zox est donc défini par les trois équations simultanées

$$(1)\qquad t\,\mathrm{Nl}\,\bar{2},94599 = 2,5878 - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{2w-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\mathrm{M}}\log\frac{1+w}{\sqrt{w^2-w+1}},$$

$$(2)\,(x\cos\alpha + z\sin\alpha)\,\mathrm{Nl}\,\bar{4},98291 = 1,8290 - \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tang}\frac{2w-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\mathrm{M}}\log\frac{1+w}{\sqrt{w^2-w+1}},$$

$$(3)\qquad z\cos\alpha - x\sin\alpha = -\frac{1}{2}gt^2\cos\alpha + \frac{1}{20}k''g^3t^5\cos^3\alpha$$
$$- \frac{3}{224}k''^2g^5t^8\cos^5\alpha + \frac{57}{12320}k''^3g^7t^{11}\cos^7\alpha - \ldots,$$

équations dans lesquelles

$$\mathrm{Nl}\,\bar{2},94599 = 3\sqrt[3]{k\,g^2\sin^2\alpha}$$

et

$$\mathrm{Nl}\,\bar{4},98291 = 3\sqrt[3]{k^2 g\sin\alpha}.$$

Si l'on donne une certaine valeur à w, l'équation (1) donnera la valeur correspondante de t. L'équation (2) donnera la valeur de $x\cos\alpha + z\sin\alpha$. Portant ensuite la valeur trouvée de t dans l'équation (3), on obtiendra $z\cos\alpha - x\sin\alpha$. Ayant $x\cos\alpha + z\sin\alpha$ et $z\cos\alpha - x\sin\alpha$, on calculera x et z. Si l'on fait $w = 1,1$ on obtient

$$t = 9^s,611, \quad x\cos\alpha + z\sin\alpha = 1528^m,3$$

et

$$z\cos\alpha - x\sin\alpha = -421,49,$$

d'où

$$x = 1585^m,1 \quad \text{et} \quad z = 16^m,17.$$

Si l'on fait $w = 1,05$, on obtient

$$t = 10^s,369,$$

puis

$$x = 1674 \quad \text{et} \quad z = -21,76.$$

Si l'on fait $w = 1$, on obtient

$$t = 11^s,186,$$

puis

$$x = 1769 \quad \text{et} \quad z = -76,59.$$

On voit par là que la durée du trajet est comprise entre $9^s,611$ et $10^s,369$, et que la portée est de même comprise entre $1585^m,1$ et 1674.

19. L'équation (1) jointe à l'équation en u'',

$$u'' = -gt\cos\alpha + \frac{1}{4}k''g^3t^4\cos^3\alpha + \ldots,$$

permet d'avoir les valeurs simultanées de u et u', puis celles de $\frac{dx}{dt}$ et de $\frac{dz}{dt}$.

Pour $w = 1,1$ on obtient

$$u = 101^s,03 \quad \text{et} \quad t = 9^s,611$$

puis l'équation en u'' donne

$$u'' = -83,713.$$

On en déduit

$$\frac{dx}{dt} = 120,197 \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = -52,622,$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = -\operatorname{tang} 23^\circ\, 38'\, 6.$$

L'angle de chute est donc à peu près $23^\circ\, 38'\, 6$.

La vitesse finale est

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\cos 23^\circ\, 38'\, 6} = 131^m,21.$$

20. En comparant ces résultats à ceux que donne l'expérience pour le boulet de 12, on reconnaît que la résistance de l'air sur le projectile que j'ai considéré est beaucoup plus énergique que sur le boulet de 12 véritable. Pour le boulet de 12 vrai, la durée du trajet dans les conditions où je me suis placé est de 14 secondes, et la portée de près de

3000 mètres. La vitesse restante est de 170 mètres et l'angle de chute de 24°20′. La dérivation finale est de 71 mètres. A la distance de 1600 mètres, qui représente la portée du projectile que j'ai considéré, la dérivation du boulet de 12 vrai est de 15 mètres. Celle que j'ai calculée pour cette distance est de 16 mètres.

Les différences entre les résultats que j'ai obtenus et ceux de l'expérience peuvent tenir à ce que la loi de résistance que j'ai adoptée n'est pas exacte, ou bien à ce que le coefficient ε que j'ai calculé d'après une formule de balistique est trop considérable. Mais elle provient certainement en grande partie de la forme du projectile que j'ai considéré. La partie ogivale qui termine le boulet de 12 doit diminuer la résistance de l'air qui s'exerce suivant la tangente à la trajectoire, et par conséquent le boulet doit aller beaucoup plus loin que si cette partie conique n'existait pas.

MÉMOIRE

SUR LES

DIX-NEUF PREMIERS ARCS-EN-CIEL DE L'EAU,

PAR M. BILLET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

§ I. — *But de ce travail. — Méthode suivie.*

Il s'agit dans ce travail d'une étude sur les arcs-en-ciel de l'eau. On y trouvera la mesure des déviations subies dans ces arcs par diverses couleurs et la comparaison des positions obtenues pour ces couleurs avec celles que leur assigne la théorie. On y trouvera encore l'étude des variations angulaires, croissantes avec le numéro de l'arc, qu'amènent, pour une même couleur, les changements de température du liquide, et le moyen de déduire de ces variations angulaires les variations correspondantes d'indice.

Comme MM. Babinet et Miller qui, avant nous, se sont occupés de ce sujet, c'est avec un filet d'eau vertical, fourni par un tube cylindrique, que nous réalisions nos arcs. La grosseur du filet influant sur la visibilité des arcs, nous avions eu soin de préparer plusieurs de ces tubes métalliques rodés, nous proposant d'appliquer les plus larges à la production des arcs, plus faibles, d'ordre élevé. Mais la pratique nous a montré, d'une part, qu'outre l'inconvénient d'une plus grande dépense de liquide, les tubes larges avaient celui de donner des veines moins tranquilles et plus aisément accessibles à des renflements qui brisent l'arc en tronçons discontinus; et, d'autre part, qu'en prenant certains soins, on pouvait tirer de nos deux tubes les plus fins, des arcs dont la

visibilité se soutenait jusqu'au dix-neuvième inclusivement, dans une chambre où cependant on laissait pénétrer assez de jour pour assurer les lectures. Leurs diamètres mesurés, dans deux sens rectangulaires choisis, avec un microscope qui donnait le millième de millimètre, se sont trouvés valoir : pour l'un, $1^{mm},318$ et $1^{mm},321$ (moyenne, $1^{mm},3195$), et pour l'autre, $1^{mm},991$ et $1^{mm},970$ (moyenne, $1^{mm},981$). C'est donc avec l'un ou l'autre de ces tubes et après nous être assuré qu'ils donnaient bien les mêmes résultats, que nos lectures définitives ont été faites.

Quoiqu'une lumière artificielle suffise à la production des premiers arcs, nous avons eu recours exclusivement au soleil qui, outre la vivacité de la lumière, a pour lui l'étroitesse du diamètre apparent. Nous n'avons pas trouvé d'avantage bien marqué à réduire encore ce diamètre par l'emploi d'une lentille cylindrique de court foyer, et nous avons toujours opéré avec le trait solaire direct, rendu toutefois horizontal par un héliostat.

Les arcs-en-ciel sont réduits, avec cette manière de les produire, à leurs pieds verticaux qui s'obtiennent, non plus comme dans la nature, avec deux gouttes d'eau distinctes et une position unique de l'observateur, mais avec une seule goutte et deux positions distinctes de l'œil. Symétriques l'une de l'autre par rapport au trait solaire, ces deux positions comprennent un arc double de celui qui sépare l'une d'elles de la direction du trait solaire. En les relevant sur un limbe à l'aide d'une alidade, on en déduira ce dernier arc, sans avoir à se préoccuper du zéro. Ce relèvement des deux tronçons d'arc-en-ciel se faisait à distance, avec une des lunettes d'un goniomètre de Babinet (grossissement, 4,3) installée au bout de l'alidade. Cette distance, égale au rayon commun de l'alidade et du limbe, était de $2^{m},239$. Notre limbe incomplet était représenté *fig.* 1 (*Pl. I*) par deux secteurs : l'un de 37 degrés, l'autre de 38 degrés, que l'on disposait, l'un à droite et l'autre à gauche du trait solaire, de manière à pouvoir y relever, sur l'un, les diverses couleurs du tronçon d'arc-en-ciel de droite, et, sur l'autre, celles identiques du tronçon de gauche. L'arc intercalé entre les secteurs, qui allait, par exemple, de la division extrême de gauche du secteur de droite à la division extrême de droite du secteur de gauche, arc variable, dont l'étendue dépendait de la position qu'il avait fallu

donner aux secteurs pour qu'ils fussent rencontrés par les deux arcs-en-ciel symétriques à relever, se mesurait avec un grand compas dont l'ouverture était reportée sur l'un des secteurs tant qu'elle ne surpassait pas 38 degrés. Quand elle les surpassait, on commençait par décomposer cet arc, en y employant l'alidade et des plaques de marbre immuables convenablement espacées, en parties moindres que 38 degrés qu'on évaluait séparément, de manière à pouvoir ajouter leur somme aux deux arcs lus sur les secteurs. Pour assurer aux secteurs une grande fixité, soit pendant les lectures, soit pendant ces déterminations de l'arc intercalé, on avait soin de les relier ensemble par une tringle et des vis. Nous obtenions ainsi, de ces secteurs, les mêmes résultats que si nous avions construit le limbe entier dont ils étaient deux fragments. Le degré, sur ces secteurs, long de plus de 39 millimètres, se trouvait divisé en 12 parties, dont un vernier, confié à l'alidade, donnait le dixième; les angles pouvaient donc se mesurer à une demi-minute près, ce qui est bien suffisant pour ce genre de recherches.

Ces déterminations ne sauraient, en effet, prétendre à une extrême précision, parce que les arcs-en-ciel, même ceux si dilatés d'un ordre élevé, ne sont que des spectres imparfaits qui se refusent à montrer les raies. Il en résulte que nos observations, conformes à celles dont on s'est si longtemps contenté en optique, après Newton et d'après lui, consistaient à amener en coïncidence avec la croisée des fils de la lunette, le commencement, la fin et la partie la plus vive des diverses couleurs. Or, le peu de discordance des lectures obtenues, soit successivement par un même observateur, soit par divers observateurs, montre que ces déterminations comportent, surtout dans leurs moyennes, une certaine exactitude. Cette complexité des couleurs des arcs étant chose essentielle, arrêtons-nous-y pour l'établir et par le raisonnement et par l'expérience.

§ II. — *Étude théorique et expérimentale sur la constitution colorifique des arcs-en-ciel. — Région des arcs surnuméraires. — Comment on les manifeste par l'emploi du réseau et du prisme.*

Les couleurs d'un arc-en-ciel sont composées, et le sont d'autant plus qu'on s'éloigne davantage du rouge. On en voit la raison.

Pour tous les arcs, la déviation ou mieux la rotation des rayons dits *efficaces* est un minimum; elle grandit : 1° pour les rayons extérieurs aux efficaces, jusqu'à un premier maximum qui, fourni par le rayon dont l'incidence sur la goutte atteint 90 degrés, vaut (L étant l'angle limite et p le numéro de l'arc)

$$2(90 - \mathrm{L}) + p(180 - 2\mathrm{L}) = (p+1)(180^\circ - 2\mathrm{L});$$

2° pour les rayons intérieurs, jusqu'à un second maximum, de beaucoup supérieur au premier, et qui, fourni par le rayon central, à incidence nulle, vaut $p.180$. Comme, d'ailleurs, la déviation minimum des rayons efficaces grandit avec l'indice du rayon simple, il en résulte que seul le rayon rouge extrême échappera à toute superposition; que tout rayon efficace plus dévié, celui du jaune par exemple, sera superposé à certains rayons non efficaces des couleurs moins réfrangibles, de sorte que, pour le violet extrême, il y aura mélange avec toutes les autres couleurs.

L'espace angulaire ouvert aux rayons non efficaces, espace marqué par l'excès de $p.180$ sur $\Delta = 2(i-r) + p(180 - 2r)$, c'est-à-dire par $2(p+1)r - 2i$, croit avec le numéro de l'arc et vaut 41°54′ dans le 1er, 128°47′ dans le 2e, 221°17′ dans le 3e,..., 893°20′ dans le 10e, 989°20′ dans le 11e, etc. S'il est évident que, dans ces espaces croissants, les rayons non efficaces sont loin d'être uniformément distribués, cependant on doit admettre qu'ils sont moins serrés quand l'angle est plus grand, et l'on s'expliquerait ainsi comment, dans les arcs d'ordre un peu élevé, les arcs-en-ciel élémentaires des couleurs les plus réfrangibles auraient une supériorité plus marquée sur ces rayons étrangers qui leur sont mêlés, et pourquoi on y discerne du bleu et du violet, ce qui n'arrive pas dans nos premiers arcs.

Dans l'espace ouvert aux rayons non efficaces, on sait qu'il faut distinguer, comme ayant une importance capitale, à cause des phénomènes d'interférence qui peuvent s'y produire, la région propre aux rayons ultra-efficaces, région où ceux-ci sont superposés aux premiers des rayons anté-efficaces. Cette région qui avoisine les rayons efficaces et qui a pour expression $(p+1)(180-2L)-\Delta$ est peu étendue, et l'est d'autant moins qu'il s'agit d'arcs d'un numéro plus élevé. Elle vaut $27^\circ 43'$ pour le 1er arc, $17^\circ 30'$ pour le 2e, $12^\circ 55'$ pour le 3e, etc., et ne s'élève qu'à $4^\circ 37'$ dans le 10e. Miller, dans ses études sur les arcs surnuméraires des deux premiers arcs-en-ciel, a vu ces bandes d'interférence atteindre, dans le 1er arc, le milieu de l'espace où elles sont possibles, et, dans le second, en remplir la presque totalité.

Pour vérifier ce qui vient d'être dit sur la constitution colorifique des arcs-en-ciel, nous installons, au bout de la grande alidade (*fig.* 2), outre la lunette du goniomètre de Babinet, le limbe de cet appareil, et nous disposons sur sa plate-forme, normalement aux rayons arrivants et au centre d'un carton percé, un réseau au $\frac{1}{50}$ de millimètre, par lequel les rayons générateurs des diverses parties de l'arc-en-ciel doivent passer tour à tour avant d'atteindre l'objectif. La lunette est-elle dirigée vers la veine liquide, on voit la couleur de l'arc-en-ciel, comme si le réseau n'était pas interposé; mais quand on la fait tourner autour de la plate-forme, on ne tarde pas à obtenir un spectre plus ou moins incomplet et capable de nous dire, par sa constitution, de quelles couleurs élémentaires se compose la petite portion d'arc-en-ciel à laquelle le réseau livre passage. Le réseau est-il sur le rouge extrême, le spectre n'a que du rouge; mais au fur et à mesure que le mouvement de l'alidade amène sur le réseau les couleurs qui suivent le rouge, on voit s'adjoindre successivement au rouge, l'orangé, le jaune, le vert, etc., jusqu'à ce qu'enfin le spectre devienne complet.

Ce n'est pas tout : pendant que le spectre se développe ainsi par le mouvement de l'alidade, on ne tarde pas à voir s'y former à l'extrémité rouge, plus tôt si le tube d'écoulement est gros et plus tard s'il est fin, une bande obscure qui chemine à travers les couleurs. L'alidade continuant de se déplacer, on voit éclore, toujours dans le rouge extrême, pour se mouvoir encore vers le violet, de nouvelles bandes; de sorte que bientôt le spectre se trouve coupé par trois ou quatre bandes

obscures. Ces bandes qui s'obtiennent avec netteté dans les sept premiers arcs et s'y obtiennent avec des tubes de diamètres différents, sont autant d'arcs surnuméraires propres à la couleur simple où elles sont installées. Tandis que ceux de la nature sont des arcs composés dus au concours de divers rayons simples, ceux-ci, grâce à l'action séparatrice exercée par le réseau, sont de véritables arcs surnuméraires élémentaires; tandis que dans la nature on ne les voit qu'au delà de l'arc-en-ciel proprement dit, ceux que cet arc pourrait recéler restant forcément inaperçus, ici, où la grosseur du filet liquide les rend possibles au sein même de l'arc-en-ciel, on les voit aussi bien dans l'arc qu'en dehors.

Notre but, en recourant au réseau, était de trouver dans la constitution des arcs-en-ciel, à défaut des raies qu'on n'y discerne pas, quelque repère qui permît d'introduire dans le relèvement des couleurs une précision plus grande qu'on ne l'obtient par l'appréciation de la teinte. Ces bandes, qu'on voit poindre à un moment précis, nous semblent répondre au but proposé; mais n'ayant songé à l'emploi de cet auxiliaire que tardivement, et lors de la rédaction de notre travail, nous n'avons pu en reprendre les mesures qui se trouvent dès lors reposer toutes sur l'appréciation de la couleur; n'oublions pas d'ailleurs que ces nouveaux moyens ne profiteront (s'il doit y avoir profit) qu'aux arcs seuls capables d'offrir ces bandes, et que pour les autres, beaucoup plus faibles, on devra s'en tenir à la pure appréciation des teintes.

Au lieu du réseau, nous nous sommes encore mieux trouvé d'un petit prisme installé également sur la plate-forme du limbe, en avant de la lunette, et amené à procéder par déviation minimum sur la portion d'arc-en-ciel qui l'atteint. Les spectres ainsi obtenus sont beaucoup plus vifs que ceux que donnait notre réseau, et nous avons pu déjà suivre l'apparition des bandes jusqu'au 11^e arc-en-ciel. Si le prisme est assez ouvert, on peut même voir à la fois raies du spectre et bandes surnuméraires, ce qui semble promettre au relèvement de ces dernières la précision des meilleures expériences d'optique.

Quoiqu'il ne faille pas voir dans cette étude accessoire, où nous n'avons pas pu discerner plus de cinq ou six de ces bandes dans les deux premiers arcs-en-ciel, au lieu des quinze et vingt qu'on peut y voir autrement, une étude capable, à l'égard de ces premiers arcs, de rivaliser

avec celle si remarquable que la science doit à Miller; quoique pour les voir dans toute leur beauté et jusqu'aux derniers, ce ne soit pas à $2^m,239$ du filet liquide, mais beaucoup plus près de lui qu'il faille se placer, cependant nous croyons pouvoir remarquer que ce mode nouveau d'observation a pour lui les avantages suivants : 1° d'étudier des arcs surnuméraires simples; 2° de relever leurs angles de position dans des conditions de précision supérieure, et enfin 3° de montrer ces arcs jusque dans le 11ᵉ arc-en-ciel, tandis que, de près, à la manière de Miller, on a déjà beaucoup de peine à les voir dans le 3ᵉ.

Quand on voit la lumière blanche donner si peu de franges dans les expériences ordinaires de Young, dans celle des anneaux de Newton, etc., on a droit d'être surpris de voir cette même lumière en donner un si grand nombre dans le phénomène des premiers arcs-en-ciel. Ce développement inusité du nombre des franges de la lumière blanche se retrouve dans d'autres circonstances; par exemple, quand dans cette même expérience de Young on interpose, sur le trajet des deux faisceaux, des épaisseurs équivalentes un peu grandes de deux corps doués de dispersions différentes : verre et gypse, par exemple; et là nous avons trouvé cette particularité piquante que l'emploi du verre rouge en réduisait considérablement le nombre. Nous comptons exposer un jour ces expériences, si faciles quand on y emploie le compensateur interférentiel que nous avons décrit dans les *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, t. LXIV, p. 385; mais nous croyons devoir remarquer que là, comme dans les arcs-en-ciel, les franges diversicolores, au lieu d'avoir leur centrale superposée, partent d'origines distinctes, de sorte qu'on serait tenté de croire que le petit nombre des franges de la lumière blanche tient aussi bien à ce point de départ commun qu'à la complexité de la lumière.

Après cette longue digression sur la constitution des arcs, à laquelle nous avons dû nous livrer pour établir les ressources expérimentales qu'on peut tirer de l'emploi d'un réseau ou d'un prisme, revenons au détail de nos expériences.

§ III. — *Précautions à prendre pour voir et reconnaître les divers arcs-en-ciel. — Visibilité supérieure de ceux qui s'approchent le plus de la direction normale au trait solaire.*

La visibilité des arcs-en-ciel est aisément compromise par une lumière éblouissante due soit à la réflexion extérieure, soit, si l'eau est impure, à une énergique dissémination opérée dans toute l'épaisseur du filet. On éliminait ce dernier obstacle en n'opérant qu'avec de l'eau très-pure, soumise au besoin à une récente filtration; on éliminait l'autre en faisant agir sur le tube d'écoulement quelqu'un qui le poussait du doigt, dans un sens ou dans l'autre, et l'inclinait ainsi de très-faibles quantités sur la verticale, jusqu'à ce que l'observateur se déclarât débarrassé de la lumière étrangère. La veine apparaissait alors parfaitement obscure dans la lunette mise au point, et, en mouvant l'alidade, on ne tardait pas à en voir sortir, tantôt à droite, tantôt à gauche, les couleurs génératrices de l'arc étudié; mais cette légère obliquité de la veine qui montrait nettement un arc-en-ciel ne convenait plus toujours au même arc pris de l'autre côté. Il fallait donc souvent, avant de faire les secondes lectures symétriques des premières, soumettre le tube à de légers changements de direction qui, étant indiqués par les premiers, réussissaient plus vite qu'eux.

La concentricité du filet liquide au limbe était assurée comme il suit (*fig.* 2) : le centre du limbe était représenté par l'axe d'un cylindre métallique un peu gros et assez élevé pour recevoir l'une après l'autre et les douilles centrales des deux secteurs et celle de l'alidade. La base libre de ce cylindre était percée d'une petite ouverture centrale au-dessus de laquelle on disposait le tube d'écoulement, dérangeant le vase porteur de ce tube jusqu'à ce que la veine, repérée sur deux fils à plomb, fût, d'une part, verticale, et, de l'autre, enfilât la petite ouverture. Eh bien, les altérations introduites après coup dans cette verticalité pour éliminer, comme on vient de le dire, la lumière étrangère, n'altéraient, grâce à la grandeur du rayon des secteurs et de l'alidade, la concentricité de la veine que d'une manière insignifiante.

L'arc-en-ciel, quoique rudimentaire, devient aisément discontinu; les

secousses de l'eau qui tombe, une charge trop grande, sont autant de causes qui donnent à la veine des nodosités, des irrégularités et en amènent la décomposition en parties qui n'offrent plus une seule couleur dans une même direction. Ce qui nous a le mieux réussi, pour éviter ces dislocations des arcs-en-ciel, a été de placer dans le tube long et large, qui recevait par en haut l'eau d'un vase de Mariotte et se terminait à sa partie inférieure par le tube d'écoulement, une série d'obstacles qui amortissaient la vitesse. Pour les observations à l'eau froide, ces obstacles étaient tout trouvés : c'étaient les morceaux de glace très-pure, qui, destinés à refroidir l'eau, remplissaient le large tube; pour les observations à l'eau chaude, c'étaient des cailloux, des boules de verre, qui imposaient aux mouvements de l'eau des sinuosités capables d'en amortir la vitesse.

Il est un cas où l'éblouissement, dû à la dissémination, persévère même avec de l'eau très-pure : c'est quand l'eau est chaude et la température de l'air basse. Le filet d'eau s'entoure alors d'une vapeur singulièrement gênante, surtout pour les arcs qui, comme le 12^e, se voient sur le soleil lui-même. Nous avons dû, pour atténuer cet inconvénient, renoncer à faire l'hiver les observations à l'eau chaude et les renvoyer à l'été. Avec cette précaution, la température de l'eau a pu être portée à 50 degrés. Chaude ou froide, on en prenait la température en recevant le jet sur le réservoir d'un petit thermomètre qui en était tout enveloppé.

Par toutes ces précautions, on obtient des arcs assez nets pour pouvoir y suivre le développement des couleurs depuis le rouge jusqu'au vert inclusivement; mais il est quatre arcs privilégiés pour lesquels la lumière étrangère joue un rôle moins fâcheux, où les couleurs atteignent une beauté exceptionnelle, et chez lesquels on voit très-bien, à la suite du vert, les teintes bleues et violettes : ce sont les 9^e et 15^e, 13^e et 11^e arcs, qui ont cela de commun que leurs directions sont celles qui approchent le plus de la perpendicularité sur le trait solaire.

On avait trois moyens pour reconnaître les arcs, à savoir : le sens dans lequel couraient les couleurs prises du rouge au violet; le côté de la goutte par lequel elles sortaient, côté qu'il fallait prendre contraire au côté apparent, vu le renversement de la lunette, et enfin l'étendue angulaire du développement des couleurs qui grandissait avec le nu-

méro de l'arc. L'observation de ces trois particularités, jointes à la connaissance de la position absolue et de l'étendue angulaire assignées par le calcul à chaque arc-en-ciel, nous a permis de reconnaître sûrement chacun des seize premiers. Jusqu'à ce numéro, quand deux arcs se voient simultanément et s'entremêlent comme les 10e et 14e, 2e et 5e, 9e et 15e, 11e et 13e, 3e et 4e, 8e et 16e, et enfin 12e et 12e, il arrive, et la rose des seize premiers arcs-en-ciel de l'eau jointe à ce travail en fait foi, il arrive, dis-je, que, pour ces arcs à l'égard desquels on pourrait craindre quelque confusion, et la sortie de la goutte et le développement des couleurs ont lieu de côtés opposés.

Au delà de l'arc 16e, nous n'avons plus pu reconnaître que trois arcs, à savoir : l'arc 17e dont le maximum tombe, à la température ordinaire, dans une éclaircie qui reste inoccupée entre les 7e et 4e arcs [*voir* la rose des arcs-en-ciel (*fig.* 3)]. Quant aux 18e et 19e, ils se seraient révélés surtout par les difficultés que nous avons rencontrées dans l'observation des 6e et 14e arcs auxquels ils viennent se mêler, avec cette aggravation, pour l'arc 19e, que le 6e et lui sortent du même côté de la goutte et ont leurs couleurs développées dans le même sens.

§ IV. — *Méthode de calcul suivie pour déduire des variations qu'amène, dans la position des arcs, le changement de température de l'eau, les variations correspondantes d'indice.*

On sait les difficultés que l'on rencontre quand on veut déterminer à l'aide de prismes les indices que revêt un même corps aux diverses températures. En effet, à moins de se borner aux températures atmosphériques, ou bien de se constituer, comme vient de le faire M. Le Roux dans ses belles recherches sur les indices des vapeurs, une vaste enceinte à température sensiblement constante, les faces du prisme se voilent, les images perdent leur netteté, et la grande précision dont on aurait besoin, pour atteindre des variations toujours faibles, se trouve compromise. L'emploi des arcs-en-ciel n'a aucun de ces inconvénients. Le filet liquide, libre de toute enveloppe et observé à la sortie même du vase d'écoulement, avant d'avoir subi une appréciable variation de tem-

pérature, livre ses divers arcs dans les directions exactes qui conviennent à la température actuelle. Or, ces directions peuvent différer beaucoup si l'arc est d'un numéro élevé et la rotation considérable; mais comment tirer des variations qu'éprouvent les directions des couleurs, par l'échauffement du liquide, les variations correspondantes de l'indice n?

Au fond, chaque arc-en-ciel fournit une relation entre Δ et n, capable également de donner, soit Δ quand n est connu, soit n quand c'est Δ que l'on possède; mais les formules ordinaires, au lieu d'être explicites entre Δ et n, restent implicites, deux autres quantités, i et r, s'y trouvant associées aux deux essentielles Δ et n, ce qui laisse la question subordonnée à trois équations dont l'emploi, assez commode quand on connaît n, l'est beaucoup moins quand, se donnant Δ, il faut en déduire n.

Il est vrai que M. Babinet s'est proposé d'obtenir et a obtenu, en effet, pour les deux premiers arcs, les équations explicites entre Δ et n. Il est vrai que nous-même, à l'occasion de ce travail, appliquant la méthode de ce savant physicien à l'élimination de i et de r dans les deux arcs suivants, nous avons obtenu deux nouvelles de ces équations, ne nous arrêtant à ce numéro qu'à cause de la longueur des calculs. Grâce à ces équations, qu'on trouvera plus loin (p. 84), on pourrait passer, de Δ mesuré à n, par un calcul direct, consistant dans la résolution d'une équation numérique, qui est du troisième degré pour le 1^er arc, du quatrième pour le 2^e, du cinquième et du sixième pour les 3^e et 4^e arcs, et probablement du degré $p+2$ pour le $p^{\text{ième}}$ arc-en-ciel; mais, privés de ces formules à partir du 5^e arc, on n'aurait plus alors à sa disposition, pour en déduire la valeur de n, que les équations

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2-1}{(p+)^2-1}},$$

$$\sin r = \frac{1}{n}\sin i,$$

$$\Delta = 2i - 2(p+1)r + p.180,$$

qui ne donneraient cette inconnue que par des calculs longs et pénibles.

Nous n'avons pas songé un seul instant à suivre une telle marche, qui

n'eût été d'ailleurs applicable qu'aux quatre premiers arcs. On conçoit qu'une recherche des variations que subissent des indices connus puisse se faire par des moyens plus simples que celle qui déterminerait les valeurs absolues de ces indices. La marche détournée à laquelle nous avons eu recours repose sur le calcul préalable d'un certain nombre de valeurs de Δ correspondantes à certaines valeurs de n voisines l'une de l'autre; de tels calculs numériques nous étaient d'ailleurs indispensables à d'autres titres.

La comparaison des positions expérimentales et théoriques qu'ont les diverses couleurs dans les divers arcs-en-ciel, comparaison qui était un premier but de ce travail, suppose qu'on a calculé, par les formules implicites ordinaires entre i, r, Δ et n, les valeurs de Δ propres aux diverses couleurs. Nous avons donc commencé par établir pour chacun des seize premiers arcs, sept de ces calculs, à savoir : 1° pour les cinq raies B, D, E, F, H dont les indices, à 16 degrés centigrades, ont été déterminés par Fraunhofer; 2° pour le rayon le plus intense que nous avons placé, avec Fraunhofer et Miller, entre les raies D et E à une distance de D égale aux $\frac{7}{24}$ de l'intervalle qui les sépare, ce qui lui assigne pour indice 1,33424, et enfin pour le milieu du vert dont nous avons déterminé l'indice comme il suit.

Fraunhofer ayant donné les λ des rayons extrêmes qui séparent le vert du jaune et du bleu, leur moyenne $0^{mm},000512$ peut être considérée comme le λ du milieu de cette couleur. Or, on a les indices de l'eau pour les deux raies E et F situées dans les régions qu'occupe le vert, et l'on en déduit la variation d'indice qui, dans ces parages, accompagne une certaine variation de λ. On peut donc en tirer, par la relation admissible de proportionnalité, ce qu'il faut ajouter à n_F pour avoir le n du milieu du vert. Je trouve ainsi 1,336501. J'ai pris dans mes calculs, par inadvertance, 1,336594 qui en diffère peu.

Muni de ces calculs, on reconnaît sans peine, comme on pourrait, du reste, l'établir encore par un calcul général, que, dans les limites de la variation, égale à $n_H - n_B$ que n s'y trouve recevoir, il y a sensiblement proportionnalité entre les variations corrélatives de n et de Δ; car en calculant, pour chacun des six intervalles que laissent les sept rayons le quotient de la différence des déviations par la différence des indices, ce quotient qui, en rigueur, diminue du rouge au violet,

n'éprouve que d'insignifiantes diminutions et peut être considéré comme constant. Dans ces quotients qui vont nous servir, l'indice étant exprimé en millionièmes, on aura la variation angulaire qui, dans ces limites, répond à un millioniène de variation dans l'indice. Ces quotients, sensiblement constants pour un même arc, mais croissants avec le numéro de l'arc, seront exprimés en seconde et s'élèvent du 1er arc au 16^e de 0″,51 à 5″,9.

Cela posé, quand, l'eau s'échauffant, son indice s'affaiblira pour chaque couleur, la réfraction d'une couleur donnée deviendra ce que vaut à une température plus basse la réfraction d'une autre couleur plus voisine du rouge, et, si ce déplacement d'indice n'excède pas celui qui a lieu, à une même température, depuis le rouge jusqu'au violet, il suffira, profitant de la proportionnalité précédente, de diviser la variation trouvée pour Δ par celle propre à un millionième de l'indice, pour obtenir en millionièmes d'unité la variation d'indice due à la variation de température, et, par suite, en divisant par cette dernière variation, la variation moyenne d'indice due à un seul degré.

§ V. — *Explication des seize tableaux qui contiennent, pour les seize premiers arcs-en-ciel de l'eau, les résultats de la théorie et de l'expérience. — Exemples des calculs à faire sur les données de l'observation.*

Avant de passer aux seize tableaux qui résument et nos expériences et leur comparaison avec la théorie et les valeurs qu'elles assignent au changement d'indice que subit l'eau quand elle s'échauffe, donnons quelques explications sur la manière dont ils sont disposés.

En tête se trouvent, sous le titre *Calculs :*

1° Les rotations Δ que subissent, dans l'eau à 16 degrés, pour l'arc étudié, les sept rayons précités;

2° Sous le titre d'angle de position, la différence entre Δ et le multiple de 180 degrés qui en est le plus rapproché, ce qui donne l'angle avec le trait solaire arrivant ou avec son prolongement;

3° Les variations angulaires totales qui séparent les rayons B, D, E, F, H;

4° Les quotients de ces variations totales par les variations d'indice, c'est-à-dire la variation angulaire due à la variation 0,000001 dans l'indice, nombres dont on peut constater la quasi-constance.

Au-dessous vient, sous le titre *Observations*, un tableau à colonnes multiples, comprenant d'abord l'indication de la couleur et le rappel du chiffre de la déviation théorique pour quelques rayons; puis les résultats fournis par l'observation à diverses températures, résultats qui indiquent toujours une diminution d'indice pour l'eau chaude, et enfin la variation assignée à l'indice par ces observations pour 1 degré de température. Pour que les observations pussent servir à ce dernier calcul, il fallait être sûr qu'on y avait bien visé, à chaud comme à froid, à la même couleur, et l'on était ainsi quelquefois amené à faire un choix entre des observations qui auraient pu se valoir s'il ne s'était agi que de vérifier l'angle de position de la couleur. En pareil cas, à défaut d'un contrôle meilleur, nous considérons comme préférables les observations pour lesquelles les différences qui séparaient les directions des diverses couleurs, dans les lectures de droite et de gauche, s'écartaient le moins de l'égalité.

Ces tableaux se terminent, quand il y a lieu, par l'indication des directions dans lesquelles se voyaient, en même temps et avec une même intensité, une même couleur due à deux arcs entremêlés, couleurs qui, quoique simultanément perçues, étaient très-distinctes, attendu que, pour deux tels arcs, jusqu'au 16^e, les couleurs sortent, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, des deux flancs opposés de la veine liquide. Le relèvement de ces directions nous a paru comporter plus de précision que celui des couleurs isolées d'un seul arc, et nous y avons eu recours de préférence pour certaines constatations.

Ces seize tableaux sont précédés par celui des indices que nous avons adoptés, avec leurs différences et les angles limites correspondants. Comme derniers témoignages sur le degré de confiance que méritent les observations comprises dans les tableaux, il convient d'entrer dans quelques détails propres à établir que la diversité de l'observateur, l'emploi du plus fin ou du plus gros de nos deux tubes, n'ont pas d'influence marquée sur les résultats, et à montrer l'étendue des erreurs que comporte ce genre d'observations.

Les observations suivantes faites sur l'arc 9^e ou mieux sur l'ensemble

des arcs 9e et 11e entremêlés montrent bien que le diamètre du tube d'écoulement peut changer sans porter atteinte aux directions dans lesquelles émergent les couleurs. Elles ont porté sur les deux orangés d'égale intensité qu'à la température de 46 degrés on voit sortir à la fois des deux flancs de la veine. Pour bien juger du peu d'importance qu'ont les écarts des diverses lectures, on ne doit pas perdre de vue que les rotations qui sont en jeu dépassent ici 800 degrés.

	PETIT TUBE. $d = 1^{mm},319$. Lectures sur le secteur		TUBE PLUS LARGE. $d = 1^{mm},981$. Lectures sur le secteur	
	de gauche.	de droite.	de gauche.	de droite.
	26°.34′	14°.56′,5	26°.31′	14°.52′,5
	26.40	15. 0,5	26.23,5	15. 3
	26.42	14.46,5	26.24	15. 3,5
	26.40	15.11,5	26.18,5	14.46
	26.46,5	15.10	26.30	15.50,5
	26.44	15. 1		
Moyennes.	26.41	15. 1	26.25	15. 7

Comme exemple de la manière dont on passe des lectures aux angles de position, on saura qu'ici l'arc qui séparait, du côté opposé au trait solaire arrivant, les divisions zéro du secteur de gauche et 38 degrés de celui de droite (*fig.* 1) (arc mesuré en cinq morceaux par les moyens décrits plus haut), valait 144°27′5″. On avait donc, pour l'angle des deux directions :

1° Avec le petit tube,

$$26°41' + 144°27'5 + (38° - 15°1' = 22°59'),$$

c'est-à-dire 194°7′6, dont la moitié donne 97°4′ pour l'angle de position compté avec le prolongement du trait solaire, quantité que nous diminuons de 4 minutes, parce qu'en mesurant au cathétomètre l'alidade et la corde de 37 degrés, nous avons reconnu que nos degrés étaient un peu trop petits et réclamaient une correction soustractive s'élevant à la fraction 0,000704 de l'arc et ne dépassant jamais 4 mi-

nutes. Le supplément 83 degrés de l'arc, ainsi corrigé, donne l'angle de position avec le trait solaire arrivant.

2° Avec le grand tube, on obtient

$$26^\circ 25' + 144^\circ 27'5 + (38^\circ - 15^\circ 7' = 22^\circ 53'),$$

c'est-à-dire 193°46', dont la moitié, 96°53', diminuée de 4 minutes, donne pour angle de position 83°11', c'est-à-dire sensiblement celui du petit tube.

Comme exemples de la tolérance que comportent les lectures ordinaires, quand elles portent, non plus sur deux couleurs simultanées fournies par deux arcs, mais sur une seule teinte, nous citerons l'arc 10e qui a donné, pour le vert, à la température $t = 49°3$:

	Lectures de gauche.	Lectures de droite.
	13°20'	25°20'
	14. 8,5	25. 7
	14.21	25.14
	13.55	25. 2
Moyennes.	13.56	25.11

ce qui conduit, car ici les deux lectures se faisaient sur un même secteur, à l'angle 11°15', dont la moitié, 5°38', est l'angle de position du vert dans l'arc 10e.

Autre exemple : l'arc 16e, à la température $t = 38°$, donne pour le vert d'intensité maximum :

	Lectures de gauche.	Lectures de droite.
	14° 5',5	21°20'
	13.45	20.57,5
	13.29,5	21.31
	13.56	21.20
Moyennes.	13.49	21.17

L'arc intercalé entre le o du secteur de gauche et le degré 38 du

secteur de droite était 33°6′5. On en déduit, pour l'écart angulaire des deux verts, la somme

$$13°49' + 33°6'5 + (38° - 21°17' = 16°43),$$

c'est-à-dire 63°38′, dont la moitié, 31°49′, exprime l'angle de position du vert.

Le 6e arc, enfin, nous offrira un exemple des variations que peut offrir le relèvement d'une même couleur quand il est fait par divers observateurs. Les observations étaient faites sur de l'eau à 3 degrés. Nous nous dispenserons de donner les lectures primitives faites sur les secteurs, pour ne relater que les angles de position qui en ont été déduits.

	1er observateur.	2e observateur.
Rouge extrême...	30°.21′	30°26′
Jaune...........	33.40	34. 5
Vert............	35.46	35.53

Les différences ne sont pas fortes; cependant, comme elles ont lieu dans le même sens pour chaque observation, on peut craindre que le jugement d'une teinte donnée ne varie avec l'observateur. Pour nous prémunir, autant que possible, contre les conséquences que de telles divergences auraient, quoique faibles, sur la détermination des variations d'indice avec la température, nous avons eu soin que, pour chaque arc, les deux sortes de lectures, celles à chaud et celles à froid, fussent faites par le même observateur.

Tableau des relations explicites entre Δ et n ou formules de Babinet.

	Déviation Δ.	$\frac{\Delta}{2}$.	$\sin\frac{\Delta}{2}$.	$\cos\frac{\Delta}{2}$.
1er arc.	$180^\circ-(4r-2i)$	$90^\circ-(2r-i)$	$\frac{1}{3n^2}(n^2+8)\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}$	$\sqrt{\frac{(4-n^2)^3}{27.n^4}}$
2e arc..	$360-(6r-2i)$	$180-(3r-i)$	$\frac{1}{8n^3}\sqrt{(n^2-1)(9-n^2)^3}$	$-\frac{1}{8n^3}(n^4+18.n^2-27)$
3e arc..	$540-(8r-2i)$	$270-(4r-i)$	$-\frac{27.n^4+896.n^2-2048}{75.n^4}\sqrt{\frac{n^2-1}{15}}$ $=-\frac{3^3.n^4+2^7.7.n^2-2^{11}}{3.5^2.n^4}\sqrt{\frac{n^2-1}{15}}$	$-\frac{1}{3.5^2.n^4}(-27.n^4+464.n^2-512)\sqrt{\frac{16-n^2}{15}}$ $=-\frac{1}{5n^4}(-27.n^2+32)\left(\frac{16-n^2}{15}\right)^{\frac{3}{2}}$
4e arc..	$720-(10r-2i)$	$360-(5r-i)$	$-\frac{-2^4.n^4+5^2.17.n^2-5^4}{2^3.3^3.n^5}\sqrt{(n^2-1)(5^2-n^2)}$	$\frac{2^4.n^6+3.5^2.11.n^4+2.3.5^4.n^2+5^5}{2^3.3^3.n^5}$

Tableau des équations qu'elles fournissent pour déduire n de Δ.

1er arc.	$n^6+3\left(5-9\sin^2\frac{\Delta}{2}\right)n^4+48.n^2-64=0$	$z^3+pz^2+qz+r=0$
2e arc..	$n^4+8\cos\frac{\Delta}{2}n^3+18.n^2-27=0$	$z^4+pz^3+qz^2+rz+s=0$
3e arc..	$3^6.n^{10}+3.5^4\left(5\cos^4\frac{\Delta}{2}-2^6\right)n^8+1867.n^6-2^{12}.3.5.71.n^4+2^{18}.3.5.n^2-2^{22}=0$	$z^5+pz^4+qz^3+rz^2+sz+t=0$
4e arc..	$2^4.n^6-2^3.3^3\cos\frac{\Delta}{2}n^5+3.5^2.11.n^4-2.3.5^4.n^2+5^5=0$	$z^6+pz^5+qz^4+rz^3+sz^2+tz+u=0$

Tableau des indices de l'eau et de quelques éléments qui en dépendent.

	Indice.	Variation de l'indice.	Angle limite L.	180 — 2L.	$\sqrt{n^2-1}.57^\circ,2986$.
Raie B................	1,330 956		48°.42′.23″	82°.35′.14″	50°,326
Raie D................	1,333 577	0,002 621	48.34.43	82.50.34	50,554
Maximum................	1,334 240	0,000 663	48.32.46	82.54.28	50,611
Raie E................	1,335 850	0,001 610	48.28. 5	83. 3.50	50,750
Milieu du vert..........	1,336 594	0,000 744	48.25.56	83. 8. 8	50,815
Raie F................	1,337 803	0,001 209	48.22.26	83.15. 8	50,919
Raie H................	1,344 169	0,006 366	48. 4.10	83.51.40	51,467
Variation d'indice entre B et H..	....	0,013 213			

§ VI. — *Les tableaux.* — *Remarques diverses.* — *Variations qu'ils assignent à l'indice de l'eau, pour* 1 *degré de température.*

1^er^ ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 180° - (4r - 2i)$.		Angle de position $180° - \Delta$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.	
	° ′ ″	° ′ ″				″	
Δ_B	137.27.26	42.22.34	entre	B et D	1375″	0,5246	*Voir*, page précédente, la colonne des variations d'indice; en supprimant la virgule, ils sont exprimés en millionièmes.
Δ_D	138. 0.21	41.59.39		....	....	....	
Δ max..	138. 6. 7	41.53.53		D et E	1184	0,5209	
Δ_E	138.20. 5	41.39.55		....	....	....	
Δ vert...	138.36.31	41.23.29		E et F	1009	0,5166	
Δ_F	138.36.54	41.23. 6		F et H	3254	0,5111	
Δ_H	139.31. 8	40.28.52		B et H	6822	0,5165	

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 0°,5$ et $t = 43°$.
		$t = 0°,5$.	$t = 9°,2$.	$t = 43°$.	
	° ′ ″	° ′	° ′	° ′	
Rouge extrême..	....	43. 3	43.26	44. 9	....
Raie B	42 22.34	....	....	....	....
Orangé.........	....	....	....	....	....
Raie D	41.59.39	....	....	....	....
Jaune.........	....	41.54	41.57	42.44	0,000 137
Vert (milieu)...	41.23.29	41.23	41.22	42.13	0,000 138
Bleu.........	....	....	....	....	....
Raie H	40.28.52	....	....	....	....

Quoique les déviations et, par suite, les variations produites dans ces déviations par les changements de température, soient faibles dans ce 1^er^ arc, cependant un échauffement de 40 degrés suffit pour amener une diminution manifeste des Δ qui donne un décroissement d'indice ne s'éloignant pas trop des résultats analogues obtenus avec des arcs plus avantageux.

Comme exemple de calcul du coefficient de variation d'indice, nous avons, pour le jaune, entre $t = 0°,5$ et $t = 43°$, soit pour la variation de $42°,5$ de température une variation angulaire de $42°44' - 41°54' = 0°50' = 3000''$ ou bien, pour un seul degré, $\frac{3000''}{42,5} = 70'',6$ qui, divisés par $0'',5209$, donnent 0,000137.

2ᵉ ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 360° - (6r - 2i)$.		Angle de position $\Delta - 180°$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
	° ′ ″	° ′ ″				″
Δ_B	230.21.13	50.21.13	entre	B et D	2478″	0,9454
Δ_D	231. 2.31	51. 2.31		D et E	2135	0,9393
Δ max....	231.12.55	51.12.55		E et F	1825	0,9345
Δ_E	231.38. 6	51 38. 6		F et H	5882	0,924
Δ vert....	231.49.42	51.49.42		....	....	....
Δ_F	232. 8.31	52. 8.31		B et H	12320	0,9269
Δ_H	233.46.33	53.46.33		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné				Variation d'indice pour 1″ compris entre	
		$t = 0°,7$.	$t = 8°,5$.	$t = 41°,8$.	$t = 43°,3$.	$t = 0°,7$ et $t = 41°,8$.	$t = 0°,7$ et $t = 43°,3$.
	° ′ ″	° ′	° ′	° ′	° ′		
Rouge extrême..	....	49.15	49.12	48.34	48.16	....	....
Raie B	50.21.13	....	....	....	....	....	....
Orangé	....	....	....	49.46	....	....	....
Raie D	51. 2.31	....	....	....	....	....	....
Jaune	....	51.20	51.10	50.19	50. 9	0,000 099	0,000 106
Vert (milieu)..	51.49.32	52.28	52.10	51. 2	51.14	0,000 126	0,000 111
Bleu...........	....	....	....	....	53. 8	....	....
Raie H	53.46.33	....	....	....	....	....	....

On sait qu'Airy, en faisant intervenir l'interférence, a obtenu, chez les deux premiers arcs, pour le maximum, une direction un peu différente de celle que donne la théorie ordinaire des rayons efficaces et que les expériences de Miller ont confirmé ces faibles écarts. Comme ces expériences ont été faites très-près de la veine et que, dans notre manière d'observer, on s'en trouve assez loin, on se demande quelle influence, dans la théorie nouvelle, est acquise à cette différence de distance; c'est là un point sur lequel nous nous proposons de revenir quand nous aurons régularisé l'emploi des moyens d'observation signalés au § II.

3e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 540° - (8r - 2i)$.		Angle de position $360° - \Delta$.	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
	° ′ ″	° ′ ″		″
Δ_B	317.30.32	42.29.28	entre B et D 3478″	1,327
Δ_D	318.28.30	41.31.30	D et E 2996	1,318
Δ max....	318.43. 5	41.16.55	E et F 2562	1,312
Δ_E	319 18.26	40.41.34	F et H 8253	1,296
Δ vert....	319.34.43	40.25.17	....	....
Δ_F	320. 1. 8	39.58.52	B et H 17289	1,308
Δ_H	322.18.40	37.41.20	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre	
		$t = 1°,6$.	$t = 36°,9$.	$t = 42,8$.	$t = 1°,6$ et $t = 36°,9$.	$t = 1°,6$ et $t = 42°,8$.
	° ′ ″	° ′	° ′	° ′		
Rouge extrême.......	....	43. 7	44.43	44.49	....	....
Raie B..............	42.29.28	....	....	....	....	....
Orangé..............	....	....	43.12	43 52	....	....
Raie D..............	41.31.30	....	....	....	....	....
Jaune...............	....	41.11	42.30	42.18	0,000 102	0,000 073
Vert (moyen)........	40.25.17	39.41	40.47	41.15	0,000 086	0,000 105
Bleu............. ..	....	....	39.22	....	....	....
Raie H..............	37.41.20	....	....	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à la tempér. $t = 1°,0$ deux rouges égaux, dus aux arcs 3e et 4e, dans la direction 42°.52′
» » $t = 36,9$ deux orangés égaux, » 3e et 4e, » 42.16
» » $t = 42,8$ deux orangés jaunâtres égaux, » 3e et 4e, » 42.59

L'arc 3e, si faible dans la nature, dont je n'ai pu que deux fois apercevoir un pâle lambeau, est, dans la chambre obscure, un très-bel arc qui, aux températures ordinaires, se mêle à peine à l'arc 4e, l'empiétement mutuel ne portant que sur les rouges extrêmes antérieurs à la raie B. La température s'élève-t-elle, les arcs se pénètrent de plus en plus, et les teintes pareilles, qui continuent de se voir dans une même direction, marchent vers leurs extrémités violettes.

4e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 720° - (10r - 2i)$.		Angle de position $\Delta - 360°$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B	402°.44'.24"	42°.44'.24"	entre	B et D	4443"	1",695
Δ_D	403.58.27	43.58.27		D et E	3829	1,685
Δ max	404.17. 5	44.17. 5		E et F	3273	1,676
Δ_E	405. 2.16	45. 2.16		F et H	110557	1,658
Δ vert	405.23. 5	45.23. 5		....	....	....
Δ_F	405.56.49	45.56.49		B et H	22102	1,673
Δ_H	408.52.46	48.52.46		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 1°,5$ et $t = 48°,8$.
		$t = 1°,5$.	$t = 48°,8$.	
Rouge extrême	° ' "	43°. 9'	40°.27'	....
Raie B	42.44.24	....	....	....
Orangé	....	43.54	41.44	....
Raie D	43.58.27	....	....	....
Jaune	....	44.29	42. 8	0,000 107
Vert moyen	45.23. 5	46. 1	43.44	0,000 104
Bleu	....	....	46.24	....
Raie H	48.52.46	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 2°,1$, deux rouges égaux, dus aux arcs 4e et 3e, dans la direction 42°.58'
» $t = 36,9$, deux orangés égaux, » 4e et 3e, » 42.46

5^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 900° - (12r - 2i)$.		Angle de position $540° - \Delta$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B	487° 3′ 33″	52° 56′ 27″	entre	B et D	5395″	1″,327
Δ_D	488.33.28	51.26.32		D et E	4648	1,318
Δ max....	488.56. 5	51. 3.55		E et F	3974	1,312
Δ_E	489.50.56	50. 9. 4		F et H	12880	1,296
Δ vert....	490.16.13	49.43.47		....	....	....
Δ_F	490.57.10	49. 2.50		B et H	26897	1,308
Δ_H	494.31.50	45.28.10		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre	
		$t = 0°,7$.	$t = 6°,5$.	$t = 44°,3$.	$t = 0°,7$ et $t = 44°,3$.	$t = 6°,5$ et $t = 44°,3$.
	° ′ ″	° ′	° ′	° ′		
Rouge extrême........	....	....	....	....	....	....
Raie B..............	52.56.27	53.51	53.50	57.29	....	....
Orangé..............	....	....	....	55.15	....	....
Raie D..............	51.26.32	....	....	....	....	....
Jaune...............	....	50.35	50.38	53.50	0,000 133	0,000 106
Vert moyen..........	49.43.47	48.34	48.57	52. 7	0,000 130	0,000 133
Bleu................	....	....	....	....	....	....
Raie H..............	45.28.10	....	....	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0°,7$, deux orangés égaux, dus aux arcs 5^e et 2^e, dans la direction 51° 00′
» $t = 41,5$, deux jaunes égaux, » 5^e et 2^e, » 55.33
» $t = 41,5$, deux jaunes orangés égaux, » 5^e et 2^e, » 54.40
» $t = 41,5$, deux bleus égaux, » 18^e et 19^e, » 42.45

L'étude du 5^e arc-en-ciel de l'eau nous a donné de la peine, et cependant, parmi les arcs

énergiques, le seul qui s'y mêle est le 2e arc, si court et si reconnaissable. Nous avons été longtemps sans soupçonner que nos embarras pourraient bien venir des arcs 18 et 19, dont le premier a ses couleurs développées dans le même sens que l'arc 5. Voici comment nous nous sommes convaincu de la réalité de cette influence inattendue.

Quand, en inclinant suffisamment la veine, on rabat sur le bois de l'alidade les arcs 5 et 2 et aussi l'arc n° 1, qui est dans les mêmes parages, on s'aperçoit que la lunette continue de montrer deux arcs sur les bords opposés du filet, lesquels, débarrassés par cet artifice de leurs brillants rivaux, apparaissent alors avec netteté, offrent des coïncidences de couleurs variables avec la température et se prêtent très-bien au relèvement de leurs principales couleurs. Ce serait à eux qu'appartiendraient ces deux bleus d'égale énergie qui, à la température de 41 degrés, se montrent dans la direction 42°45'; le lecteur s'en convaincra quand il verra, § VII, les directions que nous avons obtenues pour plusieurs couleurs de ces deux arcs, et qu'il verra combien peu, quoiqu'il s'agisse d'angles de près de 1600 et de 1700 degrés, elles s'éloignent des directions théoriques.

Pour apprécier l'effet que peut avoir l'inclinaison de la veine liquide, imaginons deux plans dont l'un passe par l'axe du cylindre et la verticale, l'autre passant par le même axe et se trouvant normal au premier. Ce deuxième plan diamétral divise le cylindre en deux moitiés telles, que si dans l'une les normales intérieures à la surface sont toutes inclinées au-dessous de l'horizon, dans l'autre elles se relèvent au-dessus; une réflexion qui utilise une des premières normales déprimera le rayon réfléchi, tandis qu'il sera relevé par les réflexions opérées dans l'autre moitié. Cela posé, on conçoit que, quand les réflexions sont nombreuses et le sens de l'inclinaison convenable, elles puissent se partager à peu près également entre les deux moitiés et y occuper des positions qui donneront pour les relèvements et les dépressions deux sommes à peu près égales, cas auquel le rayon sortant se retrouvera horizontal et retrouvera la lunette, comme si le filet cylindrique fût resté vertical. Le même genre de compensation n'étant plus possible pour des arcs qui, comme 1 et 2, et même 5 et 6, sont engendrés par un petit nombre de réflexions, ou tout au moins n'ayant pas lieu pour le même sens d'inclinaison, un calcul en règle vérifierait, ce nous semble, ces prévisions.

6^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1080° - (14r - 2i)$.		Angle de position $\Delta - 540°$.	Variation angulaire.	Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B	570°52′34″	30°52′34″	entre B et D 6323	2″,412
Δ_D	572.37.57	32.37.57	D et E 5458	2,401
Δ max ...	573. 4.32	33. 4.32	E et F 4669	2,391
Δ_E	574. 8.55	34. 8.55	F et H 15001	2,356
Δ vert	574.38.39	34.38.39	....	....
Δ_F	575.26.44	35.26.44	B et H 31451	2,380
Δ_H	579.36.45	39.36.45	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné $t = 3°$.	L'observation a donné $t = 38°,4$.	Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 3°$ et $t = 38°,4$.
	° ′ ″	° ′	° ′	
Rouge extrême	....	30.21	28.	....
Raie B	30.52.34	....	....	....
Orangé	....	31.55	....	....
Raie D	32.37.57	...	....	....
Jaune	....	33.40	30.44	0,000 117
Vert moyen	34.38.39	35.46	33 29	0,000 098
Bleu	....	38.57	35.56	....
Raie H	39.36.45	....	....	....

Cet arc est, comme le précédent, mais à l'autre bout, dans le champ des deux arcs si étendus 18 et 19 (*fig.* 3); cependant son étude ne nous a pas présenté les mêmes difficultés.

7e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1260° - (16r - 2i)$.		Angle de position $720° - \Delta$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
	° ′ ″	° ′ ″				″
Δ_B	654.22.26	65.37.44	entre	B et D	7271″	2,774
Δ_D	656.23.27	63.36.23		D et E	6268	2,758
Δ max	656.54. 9	63. 5.51		E et F	5360	2,746
Δ_E	658. 8 5	61.51.55		F et H	17286	2,715
Δ vert	658 42.10	61.17.50		....	....	....
Δ_F	659.37.25	60.22.35		B et H	36185	2,739
Δ_H	664.25.31	55.34.29		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 1°$ et $t = 37°,8$.
		$t = 1°$.	$t = 37°,8$.	
	° ′ ″	° ′	° ′	
Rouge extrême	....	66.54′	71. 3′	....
Raie B	65.37.34	....	....	....
Orangé	....	64.20	67.10	....
Raie D	63.36.23	....	....	....
Jaune	....	62.20	65.28	0,000 108
Vert moyen	61.17.50	59.50	62.51	0,000 1045
Bleu	....	....	51.43	....
Raie H	55.34.29	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 37°,8$, deux rouges orangés égaux, dus aux arcs 7e et 13e, dans la direction 70°.12′
» $t = 37,8$, deux bleus violâtres égaux, » 7e et 17e, » 55.52

8e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1440° - (18r - 2i)$.	Angle de position $\Delta - 720°$.	Variation angulaire.		Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
	° ′ ″			
Δ_B .... 737°.40′. 8″	17.40. 8	entre B et D	8206″	3″,131
Δ_D 739.56.54	19.56.54	D et E	7073	3,112
Δ max.... 740.21.24	20.21.24	E et F	6046	3,096
Δ_E 741.54.47	21.54.47	F et H	19507	3,064
Δ vert.... 742.33.15	22.33.15	....	....	....
Δ_F 743.35.33	23.35.33	B et H	40833	3,090
Δ_H 749. 0.40	29. 0.40	....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 1°,7$ et $t = 38°,6$.
		$t = 1°,7$.	$t = 38°,6$.	
	° ′ ″	° ′	° ′	
Rouge extrême......	....	17.17	....	....
Raie B.............	17.40. 8	....	....	....
Orangé.............	....	19.13	....	....
Raie D.............	19.56.54	....	....	....
Jaune..............	....	20.34	17.23	0,000 100
Vert moyen........	22.33.15	23.48	20.28	0,000 105
Bleu...............	....	26.25	....	....
Raie H.............	29. 0.40	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 38°,6$, deux rouges orangés égaux, dus aux arcs 8e et 12e, dans la direction 14° 29′

9ᵉ ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1620° - (20r - 2i)$.		Angle de position $900° - \Delta$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
	° ′ ″	° ′ ″				
Δ_B........	820.49.14	79.10.46	entre	B et D	9138″	3″,486
Δ_D.... ...	823.21.32	76.38.28		D et E	7876	3,465
Δ max....	823.59.52	76. 0. 8		E et F	6732	3,447
Δ_E........	825.32.48	74.27.12		F et H	21712	3,411
Δ vert....	826.15.37	73.44.23		....	....	....
Δ_F........	827.25.	72.35.		B et H	45458	3,440
Δ_H........	833.26.52	66.33. 8		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné		Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 1°,6$ et $t = 44°,9$.
		$t = 1°,6$.	$t = 44°,9$	
	° ′ ″	° ′	° ′	
Rouge extrême......	....	81. 2	85.36	....
Raie B............	79.10.46	....	....	....
Orangé...........	....	77.19	82. 6	....
Raie D............	76.38.28	....	....	....
Jaune............	....	75.45	80.49	0,000 121
Vert moyen........	73.44.23	72.10	76.50	0,000 112
Bleu...............	....	67.52	73.54	....
Raie H............	66.33. 8	....	....	....
Violet extrême......	....	61. 7	67.59	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0°,7$, deux verts bleuâtres égaux, dus aux arcs 9ᵉ et 15ᵉ, dans la direction 71°.18′
» $t = 43,8$, deux rouges orangés égaux, » 9ᵉ et 11ᵉ, » 83.49
» $t = 43,8$, deux violets égaux, » 9ᵉ et 15ᵉ, » 71.24
» $t = 46,5$, deux orangés jaunâtres égaux, » 9ᵉ et 11ᵉ, » 82.56

10e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1800° - (22r - 2i)$.		Angle de position $\Delta - 900°$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B	903°.52′. 9″	3°.52′. 9″	entre	B et D	10067″	3″,841
Δ_D	906.39.56	6.39.56		D et E	8667	3,817
Δ max.	907.22.11	7.22.11		E et F	7416	3,797
Δ_E	909. 4.33	9. 4.33		F et H	23713	3,725
Δ vert	909.51.43	9.51.43		....	....	....
Δ_F	911. 8. 9	11. 8. 9		B et H	49873	3,774
Δ_H	917.43.22	17.43.22		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre		
		$t = 1°,6$.	$t = 37°,3$.	$t = 50°,2$.	$t = 2°$ et $t = 37°$.	$t = 3°$ et $t = 40°$.	$t = 2°$ et $t = 50°$.
	° ′ ″	° ′	° ′	° ′			
Rouge extrême.	....	....	....	....	....	....	....
Raie B	3.52. 9	....	....	....	....	....	....
Orangé	....	4.53	....	....	....	....	....
Raie D	6.39.56	....	....	....	....	....	....
Jaune	....	7.26	2.54	....	0,000 120	0,000 104	....
Vert moyen	9.51.43	11.42	7.42	5.27	0,000 107	0,000 106	0,000 122
Bleu	....	....	....	8.40	....	....	....
Raie H	17.43.22	....	....	....	....	....	....
Violet	...	....	....	12.25	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 1°,6$, deux verts égaux, dus aux arcs 5 et 14, dans la direction 12° 55′.

Surtout avec l'eau chaude, les couleurs les moins réfrangibles sont si rapprochées des rayons solaires, que la tête de l'observateur, les arrêtant, rend leur relèvement impossible; à moins que l'oculaire de la lunette, armé d'un prisme à réflexion totale, ne permette de se placer latéralement.

11^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 1980° - (24r - 2i)$.		Angle de position $\Delta - 900°$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice $= 0{,}000\,001$.	
	° ′ ″	° ′ ″				″	
Δ_B	986.50.24	86.50.24	entre	B et D	10993″	4,194	A la deuxième colonne des observations ce sont les suppléments des angles de position qui figurent.
Δ_D	989.53.38	89.53 38		D et E	9478	4,170	
Δ max..	990.39.47	90.39 47		E et F	8101	4,148	
Δ_E	992.31.35	92 31.35		F et H	26142	4,106	
Δ vert..	993.23. 7	93.23. 7		....	....	....	
Δ_F	994.46.36	94.46.36		B et H	54714	4,141	
Δ_H	1002. 2.18	102 2.18		....	....	....	

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné				Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 0°{,}5$ et $t = 39°{,}4$.
		$t = 0°{,}5$.	$t = 39°{,}4$.	$t = 46°{,}4$.	$t = 49°{,}8$.	
	° ′ ″	° ′	° ′	° ′	° ′	
Rouge extrême......	....	94.29	99. 9	99. 6	99.33	....
Raie B.............	93. 9.36	....	....	....	....	....
Orangé.............	....	89.59	94.47	....	....	....
Raie D.............	90. 6.22	....	....	....	....	....
Jaune..............	....	88.24	93.30	95. 4	95.11	0,000 112
Vert moyen.........	86.36.53	84.	89.10	90.51	92.14	0,000 114
Bleu...............	....	....	84.52	....	....	....
Raie H.............	77.57.42	....	....	....	....	....
Violet.............	....	73.51	77.17	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0°{,}5$,	deux verts égaux,	dus aux arcs	11^e et 13^e,	dans la direction	81°.39′
» $t = 2{,}5$,	deux verts égaux,	»	11^e et 13^e,	»	82.39
» $t = 39{,}4$,	deux rouges égaux,	»	11^e et 9^e,	»	97. 7 (82.53)
» $t = 41{,}7$,	deux violets égaux,	»	11^e et 13^e,	»	83.34
» $t = 46{,}7$,	deux jaunes orangés égaux,	»	11^e et 9^e,	»	96.47 (83.13)
» $t = 49{,}8$,	deux orangés égaux,	»	11^e et 9^e,	»	97.10 (82.50)

12ᵉ ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2160° - (26r - 2i)$.		Angle de position $1080° - \Delta$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B.......	1069°.45′. 5″	10°.14′.55″	entre	B et D	11926″	4″,550
Δ_D.......	1073. 3.51	6.56. 9		D et E	10271	4,519
Δ max...	1073.53 51	6. 6. 9		E et F	8787	4,499
Δ_E.......	1075.55. 2	4. 4.58		F et H	28398	4,461
Δ vert...	1076.50.55	3. 9. 5		....	....	....
Δ_F.......	1078.22.29	1.37.31		B et H	59381	4,484
Δ_H.......	1086.14.47	−6.14.47		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné					Variation d'indice pour 1° compris entre	
		$t = 1°,7$.	$t = 4°$.	$t = 14°,5$.	$t = 41°$.	$t = 47°,3$.	$t = 9°$ et $t = 47°$.	$t = 2°$ et $t = 44°$.
	° ′ ″	° ′	° ′	° ′	° ′	° ′		
Rouge extrême...	....	8.46	7.30	12. 5	....	14.52	0,000 102	....
Raie B..........	10.14.55	....	....	....	....	....	....	.1..
Orangé.........	....	6. 9	5.38	....	....	....	....	....
Raie D..........	6.56. 9	....	....	....	....	....	....	....
Jaune...........	....	4.12	....	5.57	....	....	....	....
Vert moyen.....	3. 9. 5	0.11	....	....	6. 2	7.53	....	0,000 121
Bleu............	....	....	....	....	....	....	....	....
Raie H..........	−6.14.47	....	....	....	....	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 14°,5$, deux verts égaux, dus aux arcs 12ᵉ et 12ᵉ, dans la direction 0° 0′ 0″.

Cet arc-en-ciel est difficile à observer parce qu'il se voit dans la direction même du soleil, ayant, à la température de 14 degrés, tout ce qui précède le vert d'un côté de l'astre, et tout ce qui suit cette couleur de l'autre côté; ce qui amène en superposition, de chaque côté, les parties diverses des deux arcs identiques que l'expérience réalise. Pour atténuer la gêne qu'apporte la portion du trait solaire qui passe près de la veine, on a recours à des écrans mis près d'elle.

13ᵉ ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2340° - (28r - 2i)$.		Angle de position $\Delta - 1080°$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B	1152°.36′.59″	72°.36′.59″	* entre	B et D	12850″	4″,903
Δ_D	1156 11. 9	76.11. 9		D et E	11090	4,879
Δ max ...	1157. 5. 2	77. 5. 2		E et F	9450	4,859
Δ_E	1159.15.59	79.15.59		F et H	30555	4,819
Δ vert ...	1160.15.56	80.15.56		....	....	....
Δ_F	1161.53 29	81.53.29		B et H	63945	4,839
Δ_H	1170.22.34	90.22.34		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 7°,6$ et $t = 41°,1$.
		$t = 0°,6$.	$t = 7°,6$.	$t = 41°,1$.	
	° ′ ″	° ′	° ′	° ′	
Rouge extrême..	....	71.37	70.37	70.28	....
Raie B	72.36.59	....	....	....	....
Orangé.........	....	76.33	76.	....	....
Raie D	76.11. 9	....	....	....	....
Jaune..........	....	78. 1	77.33	72.14	0,000 117
Vert moyen....	80.15.56	81.39	81.55	77.14	0,000 104
Bleu	....	86.25	85.26	80.40	....
Raie H	90.22.34	....	....	....	....
Violet..........	....	92.48	95. 1	86.31	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0°,5$, deux verts égaux, dus aux arcs 13ᵉ et 11ᵉ, dans la direction 82°.36′
» $t = 40,3$, deux bleus violacés égaux, » 13ᵉ et 11ᵉ, » 83.19
» $t = 41,1$, deux violets égaux, » 13ᵉ et 11ᵉ, » 82.55

14e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2520° - (30r - 2i)$.		Angle de position $1260° - \Delta$.	Variation angulaire.		Variation pour une variation d'indice = 0,000 001.
Δ_B	1235°.26'.41"	24°.33'.19"	entre B et D	13772"	5",254
Δ_D	1239.16.13	20.43.47	D et E	11871	5,223
Δ max.	1240.14.	19.46.	E et F	10151	5,199
Δ_E	1242.34. 4	17.25.56	F et H	32747	5,144
Δ vert	1243.38.40	16.21.20	....	....	....
Δ_F	1245.23.15	14.36.45	B et H	68541	5,187
Δ_H	1254.29. 2	5.30.58	....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné $t = 4°,1$.	$t = 37°$.	$t = 41°$.	Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 4°$ et $t = 37°$.
Rouge extrême	° ′ ″	24°.15′	30°.40′	° ′	....
Raie B	24.33.19	....	....	....	....
Orangé	....	....	....	29.45	....
Raie D	20.43.47	....	....	....	....
Jaune	....	19. 2	25. 5	27. 9	0,000 127
Vert moyen	16.21.20	13.43	19.40	20 53	0,000 123
Bleu	....	....	....	16. 9	....
Raie H	5.30.58	....	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 39°,8$, deux orangés jaunâtres, dus aux arcs 14e et 6e, dans la direction 30°.00′
» $t = 39,8$, deux bleus violacés égaux, » 14e et 10e, » 12.56
» $t = 40,6$, deux violets bleuâtres égaux, » 14e et 10e, » 14.52

13.

15^{e} ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2700° - (32r - 2i)$.		Angle de position $\Delta - 1260°$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice = 0,000 001
Δ_B.......	1318°.14'.30"	58°.14'.30"	entre	B et D	14700"	5",608
Δ_D.......	1322.19.30	62.19.30		D et E	12669	5,574
Δ max...	1323.21.11	63.21.11		E et F	10833	5,547
Δ_E.......	1325.50.39	65.50.39		F et H	34936	5,490
Δ vert...	1326.57 52	66.57 52		....	....	....
Δ_F.......	1328.51.12	68.51.12		B et H	73148	5,536
Δ_H.......	1338.33.38	78.33.38		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné			Variation d'indice pour 1° compris entre $t = 0°,7$ et $t = 41°,3$
		$t = 0°,7$.	$t = 41°,3$.	$t = 45°,1$.	
	° ' "	° '	° '	° '	
Rouge extrême..	....	....	....	....	....
Raie B.........	58.14.30	....	....	....	....
Orangé.........	....	62.42	55.48	55.26	0,000 110
Raie D.........	62.19.30	....	....	....	....
Jaune..........	....	64.18	57.30	57.38	0,000 109
Vert moyen.....	66.58.	....	64. 4	....	....
Bleu...........	....	73.39	....	....	....
Raie H.........	78.33.38	....	....	....	....
Violet extrême..	....	79.58	....	....	....

COINCIDENCES D'ARCS.

On voit, à $t = 0°,7$, deux verts bleuâtres égaux, dus aux arcs 15^{e} et 9^{e}, dans la direction 70°.33'
» $t = 42,1$, deux orangés jaunâtres égaux, » 15^{e} et 5^{e}, » 57.31
» $t = 42,1$, deux violets égaux, » 15^{e} et 9^{e}, » 69. 1
» $t = 45,1$, deux violets égaux, » 15^{e} et 9^{e}, » 69.53

16^e ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

CALCULS.

$\Delta = 2880° - (34r - 2i)$.		Angle de position $1440° - \Delta$.	Variation angulaire.			Variation pour une variation d'indice $= 0{,}000\,001$.
Δ_B	1401°. 0'.51"	38°.59'. 9"	entre	B et D	15624"	5",961
Δ_D	1405.21.15	34.38.45		D et E	13467	5,925
Δ max ...	1406.26.48	33.33.12		E et F	11515	5,897
Δ_E	1409. 5.42	30.54.18		F et H	37143	5,835
Δ vert ...	1410.18.57	29.41. 3		....	....	....
Δ_F	1412.17.37	27.42.23		B et H	77749	5,884
Δ_H	1422.36.40	17.23.20		....	....	....

OBSERVATIONS.

	Théorie $t = 16°$.	L'observation a donné				Variation d'indice pour 1° compris entre	
		$t = 2°,5$.	$t = 4°,1$.	$t = 38°$.	$t = 41°,3$	$t = 2°,5$ et $t = 38°$.	$t = 4°,1$ et $t = 41°,3$.
Rouge extrême.	... ° ' "	37°.45'	38°.22'	45°.13'	44°.49'	....	0,000 105
Raie B........	38.59. 9	....	....	....	....	....	....
Orangé	....	34.20	....	42. 7	....	....	....
Raie D	34.38.45	....	....	....	....	....	....
Jaune	....	31.20	32. 3	38.50	37.25	0,000 129	0,000 088
Vert moyen....	29.41. 3	25.55	27.10	31.49	32.46	0,000 102	0,000 092
Bleu	....	....	....	....	....	....	....
Raie H	17.23.20	....	....	....	....	....	....

Nous donnerons, pour cet arc, le résultat de quelques calculs relatifs à l'intensité et à la constitution de la lumière qui le forme. Ils se rapportent à un rayon incident égal à l'unité.

Intensité de la lumière réfléchie polarisée dans le 1er azimut..	$I =$	0,000 508
Intensité de la lumière réfléchie polarisée dans le 2^e azimut..	$J =$	0,000 070 6
Lumière réfléchie totale $= I + J$		0,000 579
Lumière naturelle qui s'y trouve, $2J$		0,000 141
Lumière polarisée qui s'y trouve, $I - J$		0,000 437
Proportion de lumière polarisée, $\dfrac{I - J}{I + J}$		0,756

L'intensité vraie est bien inférieure au chiffre 0,000 579 qui convient à un rayon isolé et qui ne tient pas compte de l'affaiblissement spécial venant de ce que les rayons sont éparpillés dans un angle de près de 22 degrés.

Nous ajouterons que le trajet du rayon dans la goutte, trajet marqué par $34R\cos r$, atteint 22,5R, c'est-à-dire près de 23 fois le rayon du filet liquide.

Chacun de ces seize tableaux montre :

1° Aux températures voisines de 16 degrés une concordance générale entre les angles de position observés et ceux que le calcul assigne aux rayons principaux entre lesquels se trouvent les couleurs observées ;

2° Que la modification apportée dans ces angles de position par l'élévation de température de l'eau répond toujours à une diminution de la déviation et par conséquent de l'indice.

Pour se convaincre de la réalité de ce deuxième résultat, on n'a qu'à consulter la *fig.* 3 (*Pl. I*), où les seize premiers arcs sont représentés dans la position qu'ils occupent et avec le développement angulaire qui leur est propre. Dans cette *rose des arcs-en-ciel*, chaque arc débute par la raie B pour finir à la raie H avec indication des trois raies intermédiaires D, E, F. Une flèche placée à l'extrémité H montre le sens dans lequel s'accroissent les déviations. On y voit, par exemple, que, pour les arcs 6^e, 15^e, 4^e, 8^e, etc., la diminution de l'indice amène une diminution de l'angle de position, tandis que le contraire a lieu pour des arcs tels que les 5^e, 9^e, 7^e, 3^e, 16^e, etc. Cette rose donne également la clef des correspondances qui ont lieu aux diverses températures. Ainsi, aux basses températures, les arcs 11^e et 13^e se pénétrant mieux encore que cela n'a lieu sur la figure, offriront une coïncidence de teintes moyennes qui nous ont paru être leur vert. A 40 degrés, s'étant dégagés par un mouvement contraire, ils donneront coïncidence de leurs teintes bleues. A cette même température, les arcs 11^e et 9^e se seront rejoints par les rayons les moins réfrangibles, antérieurs à B, que la figure ne donne pas. Vers 50 degrés, la pénétration devient plus intime, et l'on signale la coïncidence des deux orangés.

Nous n'avons, en général, calculé la variation d'indice due à 1 degré que pour le jaune et le vert, parce que ces deux couleurs nous ont paru être les plus faciles à reconnaître. Le rouge extrême, malgré sa pureté, ne donnerait rien de bon ; car le rouge que l'on commence à voir dépend de l'intensité et peut n'être pas le même dans les deux observations faites, l'une à chaud, l'autre à froid, que l'on compare. Cette intensité ne saurait, au contraire, influer sur la direction dans laquelle une couleur composée, non extrême, semble la plus énergique. Nous avons résumé dans un tableau les déterminations de ce genre faites sur les

divers arcs; elles conduisent à une moyenne qui est la même pour ces deux couleurs, à savoir : 0,000 112. Si l'on ne considérait que les cinq arcs 7^e, 9^e, 11^e, 13^e, 15^e les plus voisins de la direction perpendiculaire au trait solaire, on aurait 113 et 109, dont la moyenne, 0,000 111, diffère bien peu de la moyenne générale.

Tableau de la variation d'indice pour 1 degré de variation de température.

N° de l'arc.	Jaune.	Vert.
1er	0,000 137	0,000 138
2^e	0,000 102	0,000 118
3^e	0,000 088	0,000 095
4^e	0,000 107	0,000 104
5^e	0,000 120	0,000 131
6^e	0,000 117	0,000 098
7^e	0,000 108	0,000 105
8^e	0,000 100	0,000 105
9^e	0,000 121	0,000 112
10^e	0,000 112	0,000 112
11^e	0,000 112	0,000 114
12^e	....	0,000 121
13^e	0,000 117	0,000 104
14^e	0,000 127	0,000 123
15^e	0,000 110	0,000 109
16^e	0,000 108	0,000 097
Sommes.....	0,001 686	0,001 786
Moyennes ...	$\frac{1}{15} = 0,000\,112$	$\frac{1}{16} = 0,000\,1116$

Les *Annales de Chimie et de Physique*, 3^e série, t. LVIII, p. 117, contiennent les résultats d'un travail de MM. Dale et Gladstone sur les variations d'indice de l'eau avec la température. Dans ces études, faites avec un prisme et poussées jusqu'à 80 degrés, les Auteurs ne paraissent pas avoir été incommodés par les déformations du prisme, puisqu'ils n'ont pas cessé de voir les principales raies et de pouvoir opérer sur elles. Cependant on ne peut pas ne pas être frappé de la marche désordonnée que suivent leurs coefficients de variation, donnés de 5 en 5 degrés. Ces irrégularités doivent tenir à ce que des variations d'indice de l'ordre de celles qui affectent l'eau dans ces circonstances, n'amènent dans les déviations minimum que de très-faibles variations (quelque chose

comme 2′ 20″ dans un prisme de 60 degrés et pour une variation de 10 degrés). Néanmoins, si nous prenons la variation totale accomplie entre 0 et 50 degrés, nous trouvons 0,0050 qui, divisé pour 50, donne, pour la variation moyenne due à un degré, le nombre 0,000100, dont le nôtre n'est pas très-éloigné.

§ VII. — *Calcul et observation des arcs* **17ᵉ**, **18ᵉ** *et* **19ᵉ**.

Donnons maintenant les quelques résultats que nous avons dit avoir obtenus sur les arcs **17ᵉ**, **18ᵉ** et **19ᵉ**.

Pour calculer les déviations théoriques de ces arcs, nous nous sommes servi de la formule approximative

$$\Delta = (p+1)(180^\circ - 2L) - \frac{\sqrt{n^2-1}\,.\,57^\circ 2986}{p+1},$$

qui s'obtient sans peine en remarquant que quand p est un peu grand, i et r diffèrent peu, le premier de 90 degrés et le second de l'angle limité L. Si on les remplace par $90 - x$ et $L - y$, x et y seront de petits angles qui permettront d'introduire, dans les formules, des approximations (*). Elle est très-commode pour donner Δ quand on connaît n et par suite L, mais elle le serait beaucoup moins, à cause de L, si l'on voulait de Δ connu déduire n.

(*) Le $p^{i\grave{e}me}$ arc-en-ciel dépend des trois équations

$$\Delta = p.180^\circ - 2(p+1)r + 2i, \quad \sin i = n \sin r, \quad di = (p+1)dr.$$

Si p est grand, on a i et r peu différents, l'un de 90 degrés, l'autre de l'angle-limite L défini par $\sin L = \frac{1}{n}$, et, posant $i = 90 - x$ et $r = L - y$, les trois équations en x et y deviennent

$$(1) \qquad \Delta = (p+1)(180 - 2L) + 2(p+1)y - 2x,$$

$$(2) \qquad \cos x = n(\sin L \cos y - \sin y \cos L = \cos y - \sqrt{n^2-1}\sin y, \quad dx = (p+1)dy.$$

Différentiant l'équation (2) et la combinant avec la dernière, on pourra lui substituer l'équation finie suivante, qui sera notre troisième équation :

$$(3) \qquad (p+1)\sin x = \sin y + \sqrt{n^2-1}\cos y.$$

Les équations (2) et (3) vont donner, comme il suit, les valeurs approchées de $\sin x$ et $\sin y$;

	$\Delta=(p+1)(180-2L)$ $-\frac{\sqrt{n^2+1}}{p+1}57°,2986$	Angle de position $\Delta-1440$.	L'observation a donné		
			$t=16°,5$.	$t=17°,5$.	$t=37°,8$
Raie B	1483°.46'.34"	43°.46'.34"	....	....	....
Raie D	1488.21.40	48.21.40	....	....	....
Maximum ...	1489.31.41	49 31.41	....	....	....
Raie E	1492.19.52	52.19.52	....	....	....
Vert	1493.37. 1	53.37. 1	56.37	55.40	....
Raie F	1495.42.40	55.42.40	....	....	....
Bleu	....	....	2 bleus égaux des arcs 17ᵉ et 7ᵉ, dans la dir. 55° 52'		
Raie H	1506.38.28	66.38.28	....	....	....

L'arc 17ᵉ, avec ses 23 degrés d'ouverture entre les raies B et H, couvre les deux arcs 4ᵉ et 7ᵉ avec l'intervalle de 7 degrés qui les répare. Ce recouvrement ayant lieu pour 7ᵉ par les couleurs les plus réfrangibles de 17ᵉ. Quand la température s'élève, 7ᵉ et 17ᵉ se meuvent en sens contraire, et ce mouvement accroissant les angles de position

---

leurs carrés ajoutés donnent la valeur exacte

$$\sin x=\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{(p+1)^2-1}}.$$

Négligeons dans (3) la faible différence qui existe entre $\cos y$ et 1, elle donnera

$$\sin y=(p+1)\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{(p+1)^2-1}}-\sqrt{n^2-1}=\sqrt{n^2-1}\left[\frac{p+1-\sqrt{(p+1)^2-1}}{\sqrt{(p+1)^2-1}}\right].$$

Substituons au numérateur, au radical, sa valeur approchée $p+1-\frac{1}{2p+1}$, et au dénominateur cette autre valeur approchée $(p+1)$, il viendra

$$\sin y=\sqrt{n^2-1}\,\frac{1}{2(p+1)^2}.$$

Introduisons dans l'équation (1), au lieu des angles x et y, ces valeurs des sinus, les deux termes $2(p+1)y-2x$ donneront

$$\frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1}-2\frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1}=-\frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1}.$$

Mais, dans ces formules, x et y étant les grandeurs linéaires des arcs dans un cercle de rayon 1, pour avoir leurs valeurs en degrés il faut les multiplier par la valeur 57°,2986 de l'arc égal au rayon; on a donc enfin

$$\Delta=(p+1)(180-2L)-\frac{\sqrt{n^2-1}}{p+1}57°,2986.$$

de 7^e^, tandis qu'il diminue ceux de 17^e^, amène une coïncidence de deux bleus que nous avions obtenue en étudiant l'arc 7^e^, sans pouvoir d'abord l'interpréter.

Donnons également les tableaux relatifs aux deux arcs suivants. Nous avons dit à la page 90 comment nous parvenions à les isoler des arcs plus énergiques qui s'y trouvent mêlés.

18^e^ ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

	$\Delta = 19(180^\circ - 2L) - \frac{1}{19}\sqrt{n^2 - 1}.57^\circ,2988.$	Angle de position théorique $1620^\circ - \Delta$.	L'observation a donné	
			$t = 16^\circ$.	$t = 44^\circ$.
	° ′	° ′	° ′	° ′
Rouge extrême...	....	....	56.50	62.46
Raie B..........	1566.30	53.30	....	....
Raie D..........	1571.27	48.33	....	....
Jaune...........	....	....	48.14	55.18
Maximum........	1572.52	47. 8	....	....
Vert (milieu),...	1576.55	43. 5	....	....
Vert........ ...	....	....	40. 8	48. 6
Bleu.	....	....	35.51	....
Raie H..........	1590.39	29.21	....	....

On voit, à $t = 16^\circ$, deux jaunes verdâtres égaux, dus aux arcs 18^e^ et 19^e^, dans la direction 41° 53′
» $t = 44^\circ$, deux jaunes orangés égaux, » 18^e^ et 19^e^, » 56° 8′

19^e^ ARC-EN-CIEL DE L'EAU.

	$\Delta = 20(180 - 2L) - \frac{1}{20}\sqrt{n^2 - 1}.57^\circ,2986.$	Angle de position théorique $\Delta - 1620^\circ$.	L'observation a donné	
			$t = 16^\circ$.	$t = 42^\circ$.
	° ′	° ′	° ′	° ′
Rouge extrême..	....	....	28.31	....
Raie B..........	1649.13	29.13	....	....
Raie D..........	1654.27	34.27	....	....
Jaune...........	....	....	35.19	27.28
Maximum.......	1655.54	35.54	....	....
Vert (milieu),...	1660.11	40.11	....	....
Vert...........	....	....	44. 7	....
Bleuâtre........	....	....	50.27	43 17
Raie H..........	1674.40	54.40	....	....

On voit, à $t = 16^\circ$, deux verts jaunâtres égaux, dus aux arcs 19^e^ et 18^e^, dans la direction 42° 23′

§ VIII. — *Études auxquelles s'appliquerait la méthode des arcs-en-ciel. — Arc-en-ciel blanc. — Indices de certains liquides.*

Quoique nous ayons consacré beaucoup de temps à ce travail, nous sommes loin cependant d'avoir épuisé le programme que nous nous étions tracé d'avance. La cause en est surtout dans l'absence d'un local spécial où nos appareils aient pu être installés d'une manière continue et dans l'obligation où nous nous trouvions par conséquent de les disposer dans la salle des cours, ce qui nous forçait de les démonter et de les remonter sans cesse. Notre plan comprenait une étude de l'arc-en-ciel blanc que notre ami Bravais, tout récemment et trop tôt ravi à la science, attribue à des gouttes creuses, et que nous devions dès lors pouvoir réaliser, soit avec une veine liquide creuse, soit plutôt avec une veine coulant autour d'un noyau cylindrique en métal poli. Il comprenait encore l'étude des arcs de divers liquides, et notamment de ceux que fournissent par fusion la stéarine, le phosphore, le soufre et peut-être l'iode. On sait que ce dernier corps fond très-bien sous une couche d'acide sulfurique. En supposant que la vapeur épaisse dont doit s'entourer sa veine ne rendît pas impossible l'observation de ses arcs, et que sa coloration dans un mince filet n'épurât pas les rayons au point de les rendre homogènes, il serait curieux de voir s'il offrira à l'état liquide la curieuse interversion d'indices que M. Le Roux a rencontrée dans sa vapeur. Nous avions enfin songé encore à voir les différences de position produites, à la même température, pour un même arc-en-ciel d'ordre élevé, par les divers mélanges d'alcool et d'eau. Mais, on le voit, il s'agit là d'une campagne expérimentale de très-longue haleine, portant sur des corps dont quelques-uns, comme le phosphore, sont d'un maniement dangereux, et qui tous réclament les commodités et les prévisions d'une installation spéciale.

Avec de tels corps, pour lesquels on connaît à peine l'indice en bloc, la marche suivie pour l'eau, laquelle repose sur la possession des indices d'un certain nombre de rayons bien définis, n'est plus possible. Après avoir observé les divers arcs et leur avoir donné, d'après leur vivacité

décroissante et leur développement angulaire croissant, leur numéro d'ordre, une première difficulté, provenant de ce que les premiers arcs viennent à manquer dès que l'indice surpasse un certain chiffre, qui est 2 pour le premier, 3 pour le second, serait de connaître le numéro réel du premier des arcs vus et classés, afin de savoir à laquelle des formules de Babinet il conviendra de s'adresser pour obtenir l'indice. Mais il serait prématuré de traiter ici les diverses questions que doit susciter une telle étude expérimentale avant le jour où elle aura été menée à bon terme.

Ce Mémoire a été présenté à l'Institut le 25 mai 1863 et renvoyé à l'examen de MM. Babinet et E. Becquerel, dont le Rapport favorable, lu le 6 juin 1864 (*) et accepté par cet illustre Corps, proposait l'insertion du Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers*. Au commencement de 1867, j'apprenais que le dépôt du Mémoire au Secrétariat n'avait pas été opéré, et qu'il me fallait procéder à sa restauration. C'est ce que je viens de faire, en m'aidant d'une copie, peu différente de la rédaction perdue, que j'avais conservée.

C'est ce même travail dont les principaux résultats ont été communiqués verbalement, le 11 avril 1863, à la réunion des Sociétés savantes.

Explication des figures de la Planche I.

Fig. 1. — Cette figure représente les deux secteurs et l'alidade, les secteurs occupant, par rapport au trait solaire, les positions dans lesquelles a eu lieu le relèvement des arcs 9 et 11.

Fig. 2. — Cette figure montre, en plan et en coupe, un des secteurs avec l'alidade, adaptés tous deux à un axe cylindrique creux autour duquel ils tournent indépendamment l'un de l'autre. Ce cylindre est fixé sur une plaque épaisse de zinc et assez élevé pour recevoir tour à tour les deux secteurs et l'alidade; sa base supérieure est percée d'une petite ouverture centrale dans laquelle est reçue et s'engage la veine, non pas directement, mais par l'intermédiaire d'un flacon coupé dont le col a reçu un tube de verre qui entre exactement dans l'ouverture. Un caoutchouc amène le liquide dans un vase placé en dessous de la plaque de zinc. Avec un liquide qui se figerait comme le phosphore, on fermerait le tube de verre et on donnerait au vase récepteur une grande largeur.

La coupe, qui donne les deux secteurs superposés sous l'alidade, montre au-dessus du vase récepteur le large tube d'où s'écoule le liquide. A sa partie inférieure lui sont succes-

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII, p. 1046.

sivement adaptés, d'abord un tube de verre, puis le petit tube de métal dont l'inclinaison, quand il y a lieu, s'obtient en pressant du doigt, dans un sens ou dans l'autre, sur le liége qui le joint au tube de verre. On n'a pas figuré le vase de Mariotte, qui fournit en quantité suffisante, le long des parois du tube large et sans secousses, le liquide au large tube.

Tandis que le plan montre installé sur l'alidade le limbe entier du goniomètre de Babinet armé d'un prisme et disposé pour l'observation des arcs surnuméraires, la coupe montre, surélevée sur un socle et parfaitement accessible à l'œil, la lunette qui suffit seule à l'observation des arcs-en-ciel. Quand on veut la diriger sur une section de la veine autre que celle qui est à son niveau, on profite des mouvements de tirage que possèdent les supports mobiles sur lesquels reposent les couronnes des secteurs. Enfin, pour montrer comment le secteur de dessous rachète sa différence de niveau et a sa division dans le même plan horizontal que celle du secteur supérieur, on l'a figuré dans la coupe. On voit que ce résultat s'obtient en faisant ses rayons de deux morceaux raccordés de manière à abaisser la partie centrale juste de l'épaisseur du bois qui forme ces rayons.

Fig. 3. — Dans cette rose, qui contient pour la température de 16 degrés les deux positions symétriques des pieds de chacun des 16 premiers arcs-en-ciel de l'eau, on a mis en place, dans chacun d'eux, les cinq rayons principaux constitués par les raies B, D, E, F, H, se bornant toutefois à mettre ces lettres indicatrices sur un seul d'entre eux, à savoir le 15e arc-en-ciel situé dans la moitié inférieure de la figure. Une flèche placée à l'extrémité H indique le sens dans lequel croissent les déviations et se développent les couleurs, sens dans lequel s'avancera l'arc-en-ciel quand, par refroidissement, l'eau deviendra plus réfrangible.

Les couleurs prises du rouge au violet se développent dans deux sens distincts. Les arcs-en-ciel où le sens est *dextrorsum* (sens du mouvement de l'aiguille d'une montre) sont donnés par des rayons qui attaquent le liquide dans la moitié du filet qui est en haut de la figure et en sortent du côté qui est à droite de l'observateur, supposé placé de manière à voir ces arcs. Pour les autres, où les couleurs se développent *sinistrorsum*, l'entrée a lieu dans la moitié de la goutte dirigée vers le bas de la figure, et la sortie par son flanc gauche.

Pour éviter toute confusion, on a distribué ces seize arcs sur deux couronnes concentriques voisines, à savoir les arcs 1, 2, 3, 7, 8, 10, 11, 12 et 15 sur l'extérieure, et les autres arcs 4, 5, 6, 9, 12, 13, 14 et 16 sur l'intérieure. Si seuls les deux arcs symétriques qui portent le n° 12 ne sont pas sur une même couronne, c'est parce que, se développant dans les mêmes régions, ils se seraient entremêlés.

Les arcs 17, 18 et 19, si étendus, quoique réduits dans la figure comme les autres, à la partie qui va de B à H, n'auraient pu, sans superpositions, s'intercaler entre les précédents. On a dû les reléguer sur d'autres couronnes intérieures aux deux premières, à savoir 17 et 18 sur une troisième couronne, et l'arc 19, qui occupe la même région angulaire que 18, sur une quatrième, en dedans des trois autres. Pour eux, l'on n'a figuré qu'une des deux positions symétriques et que quatre rayons principaux, qui sont les raies B, D, H et le rayon qui est au milieu du vert.

Si les arcs 3 et 4, qui sur la figure n'ont rien de commun, offrent cependant, à la température ordinaire, une coïncidence de couleurs, c'est, ne l'oublions pas, parce que cette figure est incomplète et ne donne pas les couleurs qui existent et qu'on aperçoit très-bien, soit avant la raie B, soit surtout, si l'arc est d'un numéro élevé, après les rayons de la raie H.

SUR LA

DÉVIATION DANS LA CHUTE DES GRAVES,

PAR M. A. HAILLECOURT,
AGRÉGÉ ET INSPECTEUR DE L'UNIVERSITÉ.

En étudiant la question, déjà ancienne, de la chute des graves, j'ai été conduit à faire abstraction de l'aplatissement du sphéroïde, de son mouvement de translation et de la résistance de l'air.

Mais, en compensation, j'ai pu établir quelques théorèmes d'un énoncé parfaitement clair, en laissant des valeurs quelconques à des éléments que l'on suppose ordinairement assez petits pour qu'on puisse en négliger les puissances supérieures.

Ma méthode est, je crois, complètement neuve; ses résultats contredisent, en quelques points, l'opinion généralement admise.

Hypothèses et définitions.

1. 1° Une sphère homogène, ou composée de couches homogènes, tourne uniformément, de l'ouest à l'est, autour d'un de ses diamètres; sa forme se maintient intacte, malgré la force centrifuge que développe la rotation.

2° Un point matériel, qui faisait corps avec la sphère, s'en détache et se meut en vertu de sa vitesse acquise et de l'attraction que la sphère exerce sur lui conformément à la loi de Newton.

On cherche les principales circonstances de son mouvement relatif,

en s'occupant surtout de la *déviation* parallèle à l'équateur (à l'est ou à l'ouest), et de la *déviation* dans le sens du méridien (au nord ou au sud).

Tel est le problème que nous nous proposons, en nous astreignant à ne baser nos conclusions que sur des résolutions, ou comparaisons, d'équations rigoureusement démontrées.

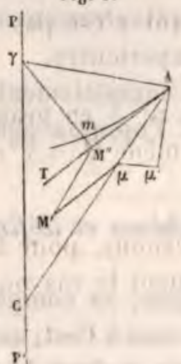
2. 3° *Définition.* — En un point A, pris hors de la sphère, on appelle *verticale* la direction initiale, estimée par rapport à la sphère mobile, de la chute d'un point matériel tombant librement à partir du moment où il s'en est détaché.

D'après un raisonnement bien connu, en appelant *fil à plomb* un fil sans masse, inextensible, mais parfaitement flexible, portant à son extrémité un point matériel, nous pouvons poser :

Principe I. — *La verticale d'un point est donnée par un fil à plomb infiniment petit suspendu à ce point.*

4° A étant (*fig.* 1) la position initiale ou le point de départ du mobile M, M′ sa position au bout du temps élémentaire θ dans son mouvement absolu, $A\gamma (= r)$ et γ le rayon et le centre du parallèle que décri-

Fig. 1.



rait le mobile s'il restait attaché à la sphère, ω la vitesse angulaire et C le centre de celle-ci; menons $M'\mu$ perpendiculaire au rayon CA, et $M'M''$ perpendiculaire à la tangente AT du parallèle; joignons $\gamma M''$ qui rencontre le parallèle en m; menons $\mu\mu' = mM''$ dans le plan PCA, perpendiculairement à l'axe de rotation PP′, et joignons $A\mu'$.

Un raisonnement connu permet de poser

$$A\mu = \frac{1}{2}G\theta^2, \quad A\mu' = \frac{1}{2}g\theta^2, \quad mM'' = \frac{1}{2}r\omega^2\theta^2,$$

en désignant par G l'*attraction réelle* et par g l'*attraction apparente*.

Comme $\omega^2 r$ est la force centrifuge en A, nous avons :

PRINCIPE II. — *L'attraction apparente, au moment du départ, est la résultante de l'attraction réelle et de la force centrifuge; elle est comprise dans le méridien.*

3. Le déplacement du mobile, dans son mouvement relatif, est la résultante des deux chemins mM'', $M''M'$, résultante qu'on peut remplacer par $A\mu'$, puisqu'ils sont respectivement égaux et parallèles à $\mu\mu'$ et $A\mu$.

$A\mu'$ est donc la direction initiale du mouvement relatif du mobile, ou (2, 3°) la verticale de A. Donc :

PRINCIPE III. — *La verticale est comprise dans le méridien.*

Remarque. — Au fond, ce troisième principe n'est autre chose que la seconde partie du deuxième; mais nous avons cru devoir conserver le mot *attraction apparente*, qui n'est pas inconnu dans le langage mathématique.

Corollaire. — Pour construire g en grandeur et direction, après avoir pris $AI = G$ sur AC, on mène $IJ = \omega^2 r$ perpendiculaire à CP, et on joint AJ (*fig.* 2, p. 116).

4. *Remarque.* — Nous convenons, pour la première partie du travail, de considérer exclusivement le cas où le point C_1 est du même côté de γ que le centre C (20).

5. 5° *Définition.* — AC_1 étant la verticale de A, imaginons le cône qu'elle engendrerait en tournant autour de PP'. Nous appellerons *nord* la portion de l'espace intérieure à ce cône, P étant le *pôle boréal*.

Remarque. — Les régions *est* et *ouest* seront toujours celles qu'a, à sa droite et à sa gauche, un observateur entraîné par le mouvement de la sphère, et regardant vers le pôle boréal ou le nord.

Formules de transformation.

6. Conservant les notations précédentes G, g, ω, appelons a le rayon CA du point de départ, φ son angle avec l'équateur, δ et φ_1 les angles de la verticale avec le rayon et l'équateur.

Comme $r = A\gamma = a\cos\varphi$, la force centrifuge a pour expression $a\,\omega^2\cos\varphi$.

Pour abréger, posons

$$(b)\qquad \frac{a\omega^2}{G} = K.$$

Le triangle AIH, dans lequel (3, *Corollaire*)

$$AI = G,\quad IJ = a\omega^2\cos\varphi = KG\cos\varphi,$$

donne

$$(c)\qquad \sin\delta = K\sin\varphi_1\cos\varphi,\quad \varphi_1 = \varphi + \delta,$$

comme relations fondamentales.

Remarque. — Si l'on pose $f = \frac{\omega^2}{\mu}$, μ étant une constante telle que $G = \frac{\mu}{a^2}$, il vient

$$(b')\qquad K = fa^3.$$

7. Les équations (c) donnent

$$(d)\quad \frac{\cos\delta}{1 - K\cos^2\varphi} = \frac{\sin\delta}{K\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi_1}{(1-K)\cos\varphi} = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1)}{(2-K)\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$(d')\quad \frac{\cos\delta}{1 - K\sin^2\varphi_1} = \frac{\sin\delta}{K\sin\varphi_1\cos\varphi_1} = \frac{\sin\varphi}{(1-K)\sin\varphi_1} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_1} = \frac{\sin(\varphi+\varphi_1)}{(2-K)\sin\varphi_1\cos\varphi_1},$$

$$(d'')\qquad \tan\delta = \frac{K\sin\varphi\cos\varphi}{1-K\cos^2\varphi} = \frac{K\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{1-K\sin^2\varphi_1},$$

d'où

$$(d''')\qquad \tan\varphi = (1-K)\tan\varphi_1 = (1-fa^3)\tan\varphi_1.$$

Corollaire. — Comme φ_1 doit être aigu, suivant la convention faite (4), (d''') prouve qu'il faut que

$$K = fa^3 < 1,$$

ce qui revient à dire qu'*il faut que la force centrifuge reste moindre que l'attraction réelle, lors même que l'on transporterait le point de départ sur l'équateur, sans changer sa distance au centre.*

Équation de la trajectoire du mobile, dans son mouvement absolu.

8. Cette courbe est (3) comprise dans le plan CAT. En prenant C pour origine et CA pour axe des X, d'un système orthogonal de coordonnées, elle a pour équation (*)

$$(t)\qquad \mu^2 y^2 + (-b)c^2 x^2 \pm 2c^2 x\sqrt{\mu^2-(-b)c^2} = c^4,$$

dans laquelle

$$(-b) = \frac{2\mu}{a} - v_0^2 = 2Ga - a^2\omega^2\cos^2\varphi,$$

$$c = av_0\sin(a, v_0) = a^2\omega\cos\varphi,$$

puisque

$$v_0 = r\omega = a\omega\cos\varphi,\quad \text{et que}\quad \sin(a, v_0) = \sin 1^d = 1,$$

d'où

$$\mu^2 - (-b)c^2 = a^4(G - a\omega^2\cos^2\varphi)^2.$$

Substituant dans (t), et divisant par a^4,

$$(t')\qquad \left\{\begin{aligned} &G^2y^2 + (2G - a\omega^2\cos^2\varphi)a\omega^2\cos^2\varphi\, x^2 \\ &\quad \pm 2(G - a\omega^2\cos^2\varphi)a^2\omega^2\cos^2\varphi\, x = a^4\omega^4\cos^4\varphi. \end{aligned}\right.$$

Le signe $-$ convient seul, puisque (t') doit être vérifié pour $x = a$ et $y = 0$.

Divisant par G^2, remplaçant $\frac{a\omega^2}{G}$ par K,

$$(t'')\quad y^2 + (2 - K\cos^2\varphi)K\cos^2\varphi\, x^2 - 2a(1 - K\cos^2\varphi)K\cos^2\varphi\, x = a^2K^2\cos^4\varphi.$$

C'est une ellipse, puisque (7, *Corollaire*) $K < 1$. Son grand axe est dirigé suivant CA, puisque C est un foyer; cela résulte d'ailleurs de ce que $(2 - K\cos^2\varphi)K\cos^2\varphi < 1$, d'après un principe bien connu de la théorie des maximum.

(*) Duhamel, t. II, p. 50.

9. Mais il est plus convenable de prendre A pour origine, et AC pour demi-axe positif.

Cette transformation donne finalement

$$(\mathrm{T}) \qquad y^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x - (2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi)\mathrm{K}\cos^2\varphi\, x^2.$$

α étant le demi-grand axe OA (*fig.* 3), et ρ le rayon de courbure AH au sommet A,

$$\alpha = \frac{a}{2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi}, \quad \rho = a\mathrm{K}\cos^2\varphi.$$

Section, par le plan de la trajectoire, du cône que décrit la verticale en tournant autour de PP′.

10. AQC₁ est (*fig.* 2) la section de ce cône par le plan méridien perpendiculaire au plan de la trajectoire.

Fig. 2.

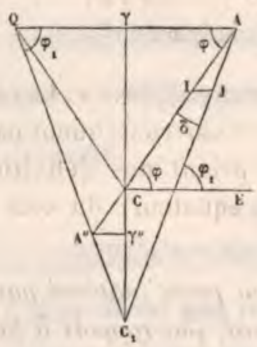
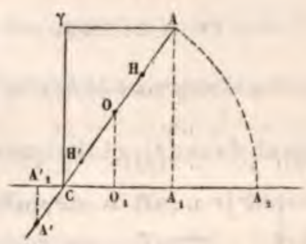


Fig. 3.



Donc, pour les mêmes axes coordonnés, l'équation est (*)

$$(v) \qquad \mathrm{Y}^2 = 2\,\frac{\mathrm{A}\gamma.\mathrm{A}''\gamma''}{\frac{1}{2}\mathrm{AA}''}\,x - \frac{\mathrm{A}\gamma.\mathrm{A}''\gamma''}{\left(\frac{1}{2}\mathrm{AA}''\right)^2}\,x^2.$$

Le triangle AQA″ donne (7, *d′*)

$$\mathrm{AA}'' = \mathrm{AQ}\,\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi+\varphi_1)} = 2a\,\frac{\cos\varphi\sin\varphi_1}{\sin(\varphi+\varphi_1)} = 2a\,\frac{1}{2-\mathrm{K}}.$$

(*) Lefébure de Fourcy, p. 325.

Donc

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{AA}'' = a\,\frac{1}{2-\mathrm{K}}, \quad \mathrm{CA}'' = a\,\frac{\mathrm{K}}{2-\mathrm{K}}.$$

Les triangles $\mathrm{CA}\gamma$, $\mathrm{CA}''\gamma''$ donnent

$$\mathrm{A}''\gamma'' = \mathrm{A}\gamma\,\frac{\mathrm{CA}''}{\mathrm{CA}} = a\cos\varphi\,\frac{\mathrm{K}}{2-\mathrm{K}}.$$

Substituant :

$$(\mathrm{V}) \qquad \mathrm{Y}^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\,x - (2-\mathrm{K})\,\mathrm{K}\cos^2\varphi\,x^2.$$

Remarque. — Les courbes (T) et (V) sont osculatrices en A.

Déviation dans le sens du méridien.

11. Rapprochons les équations (T) et (V) :

$$(\mathrm{T}) \qquad y^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\,x - (2-\mathrm{K}\cos^2\varphi)\,\mathrm{K}\cos^2\varphi\,x^2,$$
$$(\mathrm{V}) \qquad \mathrm{Y}^2 = 2a\mathrm{K}\cos^2\varphi\,x - (2-\mathrm{K})\,\mathrm{K}\cos^2\varphi\,x^2.$$

Tant que φ n'est pas nul, pour le même x, Y surpasse y. La courbe (T) est donc enveloppée par la courbe (V) (*), et par conséquent par le cône que décrit la verticale. Ainsi, nous rappelant nos définitions (5), et supposant le point de départ hors de l'équateur, du côté du pôle boréal, nous avons :

Théorème I. — *Dans sa chute libre, un point matériel passe dès le départ, et se maintient constamment au nord, par rapport à la verticale du point de départ.*

Corollaire. — C'est le plan vertical perpendiculaire au méridien qui

---

(*) C'est ce qu'on voit d'ailleurs facilement, en remarquant que (9) $\alpha = \dfrac{a}{2-\mathrm{K}\cos^2\varphi}$ et (10) $\dfrac{1}{2}\mathrm{AA}'' = \dfrac{a}{2-\mathrm{K}}$ donnent

$$\alpha < \frac{1}{2}\mathrm{AA}'', \quad \text{d'où} \quad 2\alpha (= \mathrm{AA}') < \mathrm{AA}'',$$

et que de deux ellipses osculatrices en un sommet, celle pour laquelle l'axe passant par ce sommet est le plus grand enveloppe l'autre.

détermine les régions nord et sud, telles qu'on les conçoit ordinairement. Ce plan étant tangent au cône, nous voyons que : *à fortiori le mobile se maintient au nord* (*c'est-à-dire du même côté que le pôle boréal*) *du plan vertical est-ouest*.

Déviation parallèle à l'équateur.

12. *Lemme I.* — Si un point est situé sur le grand axe d'une ellipse, sa distance au sommet le plus éloigné est le *maximum absolu* de ses distances aux divers points de la courbe.

Sa distance au sommet le plus rapproché est *maximum relatif* quand il est compris entre les centres H et H' de courbure correspondants aux sommets A et A'.

Lemme II. — Un point étant situé sur le petit axe d'une ellipse, sa distance au sommet le plus éloigné est un *maximum absolu*, s'il n'est pas compris entre les centres de courbure correspondants aux sommets; mais s'il est compris entre ces centres, cette distance est un *minimum relatif*.

13. Projetons (*fig.* 3, p. 116) sur l'équateur la trajectoire (T), de manière à avoir la trajectoire (T_1) de la projection M_1 du mobile; et pour cela remplaçons $x\cos\varphi$ par x_1, il vient

$$(T_1) \qquad y_1^2 = 2a\mathrm{K}\cos\varphi\, x_1 - \mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi)\, x_1^2 \ (^*),$$

ou

$$(T_1) \qquad y_1^2 = 2a_1\mathrm{K}x_1 - \mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi)\, x_1^2,$$

en posant

$$\mathrm{CA}_1 = \mathrm{CA}\cos\varphi = a\cos\varphi = a_1;$$

d'où (9)

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi}, \quad \rho_1 = a_1\mathrm{K}.$$

13 *bis*. Soit l'homothétique de cette courbe par rapport au centre C,

(*) On n'a pas, pour la projection, marqué les centres de courbure H_1 et H'_1 qui ne sont pas les projections de H et de H', et qui ne sont pas nécessairement situés (14, 3°) le premier sur O_1A_1, le deuxième sur $O_1A'_1$.

en prenant $\frac{1}{\cos\varphi}$ pour rapport d'homothétie. Son équation est

$$(T_2) \qquad y_2^2 = 2a\mathrm{K}x_2 - \mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi)x_2^2.$$

Elle a pour sommet de droite, qui sert en même temps d'origine, le point A_2, tel que $CA_2 = a$.

Soit encore l'homothétique pour le rapport $\frac{1}{a\cos\varphi}$; son équation est

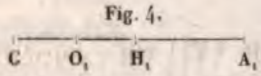
$$(T_3) \qquad y_3^2 = 2\mathrm{K}x_3 - \mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi)x_3^2.$$

Le point A_3, tel que $CA_3 = 1$, en est le sommet de droite et l'origine des coordonnées.

14. Puisque (**7**, *Remarque*) $\mathrm{K} < 1$, on voit que ρ_1 et α_1 sont moindres que a_1. Quant à leur rapport, il peut être inférieur, égal ou supérieur à l'unité :

1° Soit $\mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi) < 1$; $A_1A'_1$ est le grand axe et $\rho_1 < \alpha_1$, ce qui donne $\rho_1 < \alpha_1 < a_1$, ou cette succession de points (*fig.* 4)

Fig. 4.

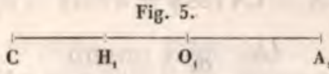


O_1 étant le centre de la courbe et H_1 le centre de courbure pour le sommet A_1; CA_1 est donc (**12**, *Lemme I*) maximum absolu.

2° Soit $\mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi) = 1$. La courbe est une circonférence dont le centre est sur CA_1; donc CA_1 est encore maximum absolu.

3° Soit enfin $\mathrm{K}(2 - \mathrm{K}\cos^2\varphi) > 1$; c'est alors le petit axe qui est dirigé suivant CA_1, et $\rho_1 > \alpha_1$, ce qui donne $\alpha_1 < \rho_1 < a_1$, ou cette nouvelle succession des quatre points (*fig.* 5)

Fig. 5.



CA_1 est encore (*Lemme II*) maximum absolu.

15. Au moment du départ, la vitesse angulaire du mobile M se projette en vraie grandeur, puisque la tangente AT est parallèle à l'équateur; la vitesse de M_1 est donc aussi ω. La loi des aires s'appliquant au mouvement de M_1 sur (T_1) comme à celui de M sur (T), à une plus

grande distance à C correspond une vitesse angulaire moindre; ω est donc le minimum absolu des vitesses; M_1 tourne donc plus rapidement que le méridien, et nous avons :

THÉORÈME II. — *Dans sa chute libre, le mobile passe dès le départ, et se maintient constamment, à l'est du méridien dont il s'est détaché.*

16. Supposons a constant, mais φ variable; $K = fa^3$ est aussi constant.

Dans l'équation (T_2), si φ augmente, y_2 diminue pour le même x_2. Soit $\varphi'' > \varphi'$; (T''_2) est enveloppée par (T'_2), qui n'a avec elle que le sommet A_2 en commun. Elle est donc, comme on le verrait facilement, parcourue avec une plus grande vitesse angulaire.

Corollaire. — De deux mobiles partis simultanément de deux points équidistants du centre, c'est celui dont le point de départ est le plus voisin du pôle qui dévie le plus rapidement à l'est.

16 *bis*. Soit, au contraire, φ constant, mais a variable. $K = fa^3$ augmente avec a. Si donc $a'' > a'$, *aux environs du sommet* A_3 (13 *bis*) commun aux deux courbes, (T''_3) est extérieure à (T'_3). D'où, par suite de la comparaison des vitesses angulaires :

Corollaire. — De deux mobiles partis simultanément de deux points d'un même rayon, celui dont le point de départ est le plus éloigné du centre est celui qui, AU COMMENCEMENT DU MOUVEMENT, *dévie le moins rapidement à l'est.*

Remarque. — Il pourra ou non, suivant les cas, rejoindre l'autre.

Du fil à plomb.

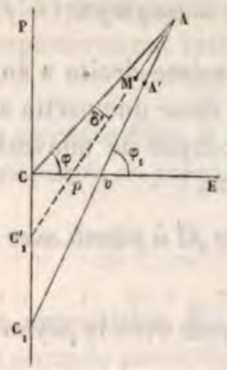
17. Soit AM un fil à plomb suspendu en A. Son prolongement Mp est la verticale de M.

ρ étant le rayon vecteur CM, il vient (7, d''')

$$\operatorname{tang} MCE \quad \text{ou} \quad \operatorname{tang} u = \operatorname{tang} MpE(1 - f\rho^3).$$

Soient CE l'axe (*fig.* 6), et C le point fixe, d'un système de coordon-

Fig. 6.



nées polaires. L'équation du lieu des points M, ou des pieds des fils à plomb suspendus en A, sera

$$\text{(F)}\qquad \operatorname{tang} u = \frac{a\sin\varphi - \rho\sin u}{a\cos\varphi - \rho\cos u}(1 - f\rho^3),$$

d'où

$$\text{(F')}\qquad \rho\frac{du}{d\rho} = f\cos^2 u\rho^3\frac{4\rho\sin u - 3a\sin\varphi}{a\cos\varphi - f\cos^2 u\rho^4}.$$

$\rho = 0$ donne $u = \varphi$. Donc la courbe passe en C, et y a CA pour tangente. Quant à la tangente en A, elle se confond avec la verticale Av (2, 3°), comme d'ailleurs on le reconnaîtrait au moyen de l'équation (F').

18. Soient A' un point, situé entre A et v, de la verticale Av, a' sa distance CA' au centre et φ' l'angle A'CE. Pour qu'il fût sur la courbe (F), il faudrait (d''') qu'on eût simultanément

$$\operatorname{tang}\varphi = (1 - fa^3)\operatorname{tang}\varphi_1,\quad \operatorname{tang}\varphi' = (1 - fa'^3)\operatorname{tang}\varphi_1,$$

ce qui est impossible, puisque $\varphi' < \varphi$ donne $a' < a$, vu que $\varphi < 90°$ (4).

Corollaire. — Tout fil à plomb se place entre la verticale et le rayon. Il résulte de ce corollaire que p est placé entre C et v.

On verrait de même qu'une droite, issue de A et comprise dans l'angle CAv, ne peut rencontrer le lieu qu'en un seul point autre que A.

Le changement de signe que subit, quand on passe de A en p, la fonction

$$\tang u - \tang M p E(1 - f\rho^2)$$

prouve d'ailleurs que cette même droite a au moins un point commun avec cette courbe. Ce lieu a donc une partie continue, comprise dans le triangle CAv, et qui n'est coupée de nouveau qu'en un seul point par toute droite issue de A. Donc :

Corollaire. — L'angle du fil à plomb avec la verticale augmente avec sa longueur.

Soit δ' l'angle du fil à plomb avec le rayon CA; on a $\delta' < \delta$.

Posons

$$(c') \qquad \sin\delta' = K' \sin\varphi'_1 \cos\varphi, \quad \varphi + \delta' = \varphi'_1,$$

sans d'ailleurs attacher à K′ aucune *idée dynamique.*

Comme nous avons (6)

$$(c) \qquad \sin\delta = K \sin\varphi_1 \cos\varphi, \quad \varphi + \delta = \varphi_1,$$

il vient

$$\frac{K}{\sin\delta \sin\varphi'_1} = \frac{K'}{\sin\delta' \sin\varphi_1} = \frac{K - K'}{\sin\varphi \sin(\delta - \delta')},$$

d'où

$$K' < K < 1.$$

19. Le fil à plomb, en tournant, engendre un cône de sommet C'_1, dont les éléments sont les mêmes que ceux du cône déjà considéré, pourvu qu'on remplace K par K′.

La section, par le plan de la trajectoire, a donc (10) pour équation

$$(P) \qquad Y'^2 = 2aK' \cos^2\varphi\, x - K' \cos^2\varphi (2 - K') x^2.$$

Reprenons (9)

$$(T) \qquad y^2 = 2aK \cos^2\varphi\, x - K \cos^2\varphi (2 - K \cos^2\varphi) x^2.$$

Au sommet commun A, les rayons de courbure ρ' et ρ sont

$$\rho' = aK' \cos^2\varphi \quad \text{et} \quad \rho = aK \cos^2\varphi;$$

donc $\rho' < \rho$, et, *aux environs de ce sommet* (*), (T) est extérieure à (P).

Si donc nous appelions (5) *nord* et *sud, par rapport au fil à plomb,* les portions de l'espace respectivement intérieure et extérieure au cône qu'il décrit, nous aurions :

Théorème III. — *Dans sa chute libre, le mobile* COMMENCE *par passer au sud de tout fil à plomb suspendu au point de départ.*

---

20. Contrairement à la supposition faite (4 et 7) jusqu'ici, admettons maintenant, pour la seconde partie de notre travail, que

$$K = fa^3 > 1,$$

puisque (7) $\tang \varphi = (1 - K) \tang \varphi_1$, φ_1 est obtus, et C_1 passe du même côté de C que γ. Le cône décrit par la verticale s'ouvrant maintenant vers le pôle austral P', les mots *nord* et *sud* ne peuvent plus s'appliquer convenablement.

Si nous supposions $K \cos^2 \varphi > 1$, comme (9) $\rho = aK \cos^2 \varphi$ serait plus grand que a, le point C serait entre le sommet A et le centre correspondant H de courbure, et le mobile ne pourrait rencontrer aucune des sphères de centre C et de rayon inférieur à CA, quelle que fût la courbe (T), ellipse, parabole, hyperbole, puisqu'alors CA serait un minimum absolu, comme on le verrait facilement par des considérations analogues à celles qui ont conduit aux lemmes I et II (12).

Nous admettrons donc que $K \cos^2 \varphi < 1$. Et alors, H étant compris entre C et A, parmi les sphères de rayon moindre que CA, il y en aura une infinité que le mobile pourra rencontrer, puisque la trajectoire est une ellipse et que nous rentrons dans l'un des cas d'application du lemme I (12). Or, c'est le seul cas qu'il soit réellement bon d'étudier.

(*) On ne peut rien dire, en général, sur le rapport des deux demi-grands axes $\frac{a}{2 - K'}$, $\frac{a}{2 - K \cos^2 \varphi}$, puisque, suivant les cas, $R' \gtreqless K \cos^2 \varphi$; de sorte que, suivant les cas, (T) coupera (P) ou lui sera complétement extérieure.

21. Un examen attentif(*) prouve que les relations trouvées (6, 7, 10) subsistent encore pour le cas de $K > 1$, ainsi que l'équation (10) de la section faite, par le plan de la trajectoire, dans le cône que décrit la verticale, savoir :

$$(V) \qquad Y^2 = 2aK\cos^2\varphi\, x - K\cos^2\varphi(2-K)x^2.$$

Corollaire. — Dans sa chute libre, le mobile se maintient constamment à l'intérieur du cône que décrit la verticale.

22. La projection sur l'équateur de la trajectoire (T) a toujours pour équation

$$(T_1) \qquad y_1^2 = 2a_1Kx_1 - K(2-K\cos^2\varphi)x_1^2,$$

$$\rho_1 = a_1 K.$$

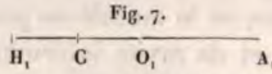
Puisque K et $2 - K\cos^2\varphi$ sont l'un et l'autre plus grands que 1, c'est le petit axe qui est dirigé suivant A_1C.

Mais ici $\rho_1 > a_1$. Donc (13 et 14) on a

$$\rho_1 > a_1 > \alpha_1;$$

d'où (*fig.* 7) la succession nouvelle des quatre points

Fig. 7.



Donc (*Lemme II*, 2^e *partie*) CA_1 est minimum relatif et ω maximum relatif.

Corollaire. — Le mobile, dans sa chute libre, reste, AU COMMENCEMENT DU MOUVEMENT, *à l'ouest du méridien.*

23. ω' étant la vitesse angulaire moyenne de M_1 dans le parcours de sa trajectoire, ou même de sa demi-trajectoire de A_1 en A'_1, on a

$$\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2 - K\cos^2\varphi}{K^{\frac{1}{3}}}.$$

(*) On est prié de construire la figure pour ce cas, et de refaire, sur cette nouvelle figure, les calculs développés au n° 10.

Comme K n'est assujetti qu'à la condition de rester compris entre 1 et $\frac{1}{\cos^2\varphi}$, $\frac{\omega'}{\omega}$ peut, suivant les cas, être inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

Corollaire. — Suivant les cas, le mobile restera constamment à l'ouest, ou bien rejoindra le méridien pour passer à l'est.

24. *Résumé.* — La loi de *déviation à l'est* n'est donc pas une *loi de mécanique rationnelle* pour les mobiles tombant sur la sphère dont ils se sont détachés.

Tel est, au contraire, le caractère absolu de la loi de *déviation à l'intérieur du cône que décrit la verticale.*

25. Quoique l'aplatissement et le défaut d'homogénéité rendent notre théorie inapplicable à la terre, il semble cependant que c'est vers le nord, et non vers le sud, par rapport à la verticale, que c'est vers le sud par rapport à un fil à plomb, qu'a lieu la déviation dans le sens du méridien.

Comparaison à une autre théorie.

26. Pour étudier la déviation dans la chute des graves, on peut, à l'examen du mouvement absolu, substituer celui du mouvement relatif.

En prenant pour axes des Z, des X et des Y positifs, la verticale du point de départ comptée de haut en bas, la méridienne dirigée du nord au sud, et la *perpendiculaire* dirigée de l'est à l'ouest,

On trouve (*) pour équations différentielles du mouvement relatif

$$\text{(E)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\sin\lambda\dfrac{dy}{dt}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\sin\lambda\dfrac{dx}{dt} + 2\omega\cos\lambda\dfrac{dz}{dt}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = g - 2\omega\cos\lambda\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

(*) Delaunay, *Cours de Mécanique rationnelle*, 1^re^ édition, p. 254.

Deux intégrations successives, en tenant compte des valeurs initiales, donnent

$$(\mathrm{E}')\quad \left\{\begin{aligned} x &= g\sin\lambda\cos\lambda\,\frac{(\omega t)^2-\sin^2(\omega t)}{2\omega^2},\\ y &= g\cos\lambda\,\frac{2\omega t-\sin 2\omega t}{4\omega^2},\\ z &= \frac{1}{2}gt^2\left(\sin^2\lambda+\frac{\sin^2\omega t}{\omega^2 t^2}\cos^2\lambda\right). \end{aligned}\right.$$

On en déduit :

1° Une déviation au sud, du quatrième ordre de grandeur par rapport à t, du deuxième par rapport à ω;

2° Une déviation à l'est, du troisième ordre par rapport à t, du premier par rapport à ω.

L'ordre par rapport à ω s'obtient, dans les deux cas, en supprimant haut et bas un facteur commun ω^2.

Remarque. — Les équations (E) s'obtiennent en regardant comme invariables l'attraction et la force centrifuge, d'où résulte l'invariabilité, en grandeur et direction, de la pesanteur ou attraction apparente g. Or, M. Quet (*) montre que ces hypothèses reviennent à négliger certains termes en ω^2. Ces équations n'établissent donc pas suffisamment la déviation au sud; il nous semble même que, vu la suppression du facteur ω^2, cette insuffisance s'étend à la déviation à l'est.

Remarque. — L'angle λ n'est autre chose que notre angle φ.

---

27. *Observation générale.* — Comme nous avons eu plusieurs fois à supposer l'angle φ différent de zéro, il peut être bon d'examiner à part ce qui a lieu pour un mobile parti d'un point de l'équateur :

1° Sa trajectoire étant comprise dans l'équateur, il ne dévie ni au nord ni au sud ;

2° Cette trajectoire a pour équation

$$y^2 = 2a\mathrm{K}x - (2-\mathrm{K})\mathrm{K}x^2.$$

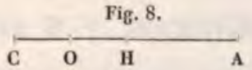
(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, année 1853, p. 225.

Nous devons (**21**) rejeter le cas de $K > 1$.

Soit $K = 1$. La courbe n'est autre chose qu'une circonférence que le mobile parcourt avec une vitesse uniforme; il ne dévie donc ni à l'est ni à l'ouest. Il est vrai aussi qu'il reste à une distance invariable de C, qu'il ne *tombe* pas, et que nous devons par conséquent exclure encore ce cas.

Soit enfin $K < 1$. La courbe est une ellipse dont AA′ est le grand axe. On a encore (**14**, 1°) $\rho < \alpha < a$, et (*fig.* 8) la succession des quatre points

Fig. 8.



CA est donc encore maximum absolu, ω minimum absolu.

Le mobile passe dès le départ, et se maintient constamment, à l'est.

Remarquons d'ailleurs que cette déviation se trouve parfaitement démontrée, pour ce cas, par le raisonnement bien simple que M. Delaunay emploie dans son excellente *Cosmographie*.

28. *Remarque générale*. — La déviation dont nous parlons est toujours une déviation *angulaire* et non pas *linéaire*.

Celle à l'est ou à l'ouest s'estime autour de la ligne des pôles, et non, comme dans la pratique, autour d'une verticale donnée par un fil à plomb.

La conception des cônes explique suffisamment ce qu'on doit entendre par déviation au nord ou au sud; nous croyons n'avoir rien à ajouter.

Quant au rayon de la sphère attirante, nous le laissons indéterminé, parce qu'il ne s'agit pas de fixer la position du *point de chute*. Il sera même convenable, dans la lecture de la plus grande partie de notre travail, de concevoir la sphère concentrée en C. On évitera ainsi l'inconvénient qui consisterait à laisser son attention s'égarer sur des idées accessoires, au lieu de la fixer exclusivement sur les points essentiels.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

RECHERCHES

SUR LA

DISSOCIATION DE CERTAINS CHLORURES AMMONIACAUX,

PAR M. F. ISAMBERT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES.

Les phénomènes de dissociation ont été découverts par M. H. Sainte-Claire Deville, qui a résumé ses expériences dans une série de Leçons faites à la Société chimique (*). Il a établi alors la décomposition partielle de certains composés gazeux ou volatils, décomposition qui va en croissant à mesure que la température s'élève : c'est à ce phénomène que M. H. Sainte-Claire Deville a donné le nom de *dissociation*.

Dans deux Notes insérées dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, M. Debray a montré que la dissociation se produit également avec les corps solides formés par l'union directe de deux autres corps dont l'un est fixe et l'autre volatil. C'est ce qui résulte nettement de ses expériences, soit sur la décomposition du carbonate de chaux, soit sur la force élastique de la vapeur d'eau émise par les sels hydratés (**).

J'ai étudié de la même manière la décomposition des corps qu'on obtient en faisant absorber le gaz ammoniac par certains chlorures et iodures. J'ai laissé de côté pour le moment ceux de ces composés qui

(*) *Leçons sur la dissociation professées devant la Société chimique*, année 1864.

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXIV, p. 603 (1867), t. LXVI, p. 194 (1868).

abandonnent leur ammoniaque seulement à une température supérieure à 300 degrés, et aussi ceux qui forment des combinaisons volatiles, comme le bichlorure d'étain, etc. Je me suis proposé principalement de rechercher comment les tensions varient avec la température, ou, en un mot, de suivre le phénomène de la dissociation graduellement dans un intervalle de température assez considérable. Les expériences antérieures, vu la difficulté d'obtenir ou de mesurer des températures constantes, ne permettant guère de faire une série continue de déterminations, la marche générale du phénomène restait forcément assez incertaine. Grâce à l'emploi de composés qui se dissocient d'une manière sensible, même à une basse température, il m'a été possible de construire un certain nombre de courbes qui montrent comment la tension varie à mesure que la température augmente.

La constance de la tension lorsque la température reste invariable étant ainsi établie comme loi générale, j'ai pu me servir de ce fait pour démontrer l'existence de composés nouveaux, alors que les procédés actuellement en usage ne fournissent aucun moyen sûr de les former ou même de rendre leur existence probable. L'étude de la dissociation des corps est donc très-fructueuse, puisque, non-seulement elle nous donne des renseignements précieux sur la manière d'agir des corps dans une circonstance déterminée, mais encore elle permet, dans un grand nombre de cas, de préparer des composés nouveaux, en nous faisant voir les conditions nécessaires à leur existence.

C'est au reste ce qu'a déjà indiqué M. Debray dans une Note précédemment citée, insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, et relative aux tensions de la vapeur d'eau émise par les sels hydratés :

« La différence entre la décomposition des sels hydratés et celle du carbonate de chaux tient donc à ce qu'il n'existe pas de combinaisons intermédiaires entre la chaux et le carbonate de chaux, comme il en existe entre le sel anhydre et le composé le plus hydraté. On voit aussi qu'une étude approfondie de la tension de vapeur des sels hydratés permettrait de reconnaître les divers hydrates qu'un même sel est susceptible de fournir (*). »

(*) *Comptes rendus*, séance du 27 janvier 1868.

Méthodes et appareils.

La méthode d'expérimentation que j'ai constamment suivie dans le cours de ces Recherches comprend trois Parties distinctes :

1° Production du gaz ammoniac;

2° Absorption de ce gaz et détermination de son poids;

3° Dégagement du gaz et mesure de sa force élastique à diverses températures.

Pour obtenir le gaz ammoniac pur, sans être obligé à chaque expérience de perdre un temps considérable à purger complétement d'air tout l'appareil, j'ai profité d'un moyen très-commode, qui avait déjà été employé par MM. H. Sainte-Claire Deville et Troost dans le cours de recherches encore inédites. L'appareil, tout à fait semblable à celui qui sert à la préparation de l'hydrogène, se compose de deux flacons munis chacun d'une tubulure à la partie inférieure : un tube de caoutchouc, solidement fixé, relie ces deux tubulures entre elles. L'un des flacons contient une dissolution ammoniacale entièrement saturée à la température ordinaire; la partie inférieure de l'autre vase est remplie de fragments de porcelaine ou de verre grossièrement concassés : ces débris forment une couche dont le niveau dépasse un peu la partie supérieure de la tubulure. Le reste du flacon renferme de la chaux potassée, fondue au au rouge et coulée sur une dalle. L'ouverture de ce deuxième vase est fermée par un bouchon de caoutchouc dans lequel pénètre un tube, muni d'un bon robinet permettant de faire écouler le gaz quand on veut, ou bien d'empêcher sa sortie et par suite sa production. Le premier flacon est également muni d'un bouchon en caoutchouc que traverse un tube de verre, par lequel l'excès de gaz ammoniac peut se dégager à travers le mercure contenu dans un troisième vase. La *fig.* 1 (*Pl. II*) donne une idée très-exacte de la forme de l'appareil : A est le flacon qui contient la chaux potassée, B celui qui renferme la dissolution d'ammoniaque; enfin C, à la partie inférieure, offre une couche de mercure, et au-dessus se trouve une assez grande hauteur d'eau.

Dans ces conditions, la production du gaz ammoniac se comprend de suite. Si l'on ouvre le robinet D, la dissolution ammoniacale pénètre en vertu de la pesanteur dans le vase A et arrive au contact de la chaux

potassée qui lui enlève une partie de son eau. Comme cette dissolution est entièrement saturée, une portion du gaz dissous se dégage, et le gaz produit sort par l'ouverture F du tube, et va se rendre dans l'appareil où se fait l'absorption. Mais si l'on ferme le robinet D, ou bien si le gaz cesse d'être absorbé, il ne tarde pas à exercer sur le liquide une pression qui le force à remonter dans le vase B. Le liquide ne venant plus alors baigner la chaux potassée, le dégagement s'arrête et ne recommence plus tant qu'on n'a pas diminué la pression du gaz ammoniac en A. Si, par suite de l'élévation de la température, la dissolution saturée contenue dans le vase B émet de l'ammoniaque, le gaz se rend en C, où il se dissout dans l'eau après avoir traversé la couche de mercure.

Pour mettre l'appareil en état de fonctionner, le moyen le plus simple consiste, après avoir mis la chaux potassée en A, à verser en B une assez grande hauteur d'ammoniaque presque saturée, puis à faire arriver par FD un courant de gaz ammoniac jusqu'à ce qu'il ne se dissolve plus dans l'eau de B. L'air contenu en A ne tarde pas à être complétement expulsé, et de la sorte on est sûr d'avoir constamment du gaz parfaitement pur. Ce gaz sera sec si une portion suffisante de A est pleine de chaux potassée non humide; mais, pour plus de sûreté, il est toujours bon de placer sur le trajet du gaz un tube assez volumineux H renfermant des bâtons de potasse caustique fondue au rouge.

On aura donc, sans chauffer, un dégagement continu de gaz ammoniac pur et sec, dégagement qui ne s'effectuera qu'au fur et à mesure des besoins.

Les corps sur lesquels j'ai opéré ont tous été préparés avec le plus grand soin; je me suis surtout efforcé de les obtenir exempts d'eau, afin de ne pas troubler la marche générale du phénomène par une circonstance qui aurait pu la modifier singulièrement.

Lorsque je me suis seulement proposé de faire absorber le gaz ammoniac par un corps, j'ai employé un procédé très-simple. Je place le corps dans un tube étiré à ses deux extrémités, pouvant se fermer à l'aide de deux bouts de tube de caoutchouc munis d'obturateurs de verre. Il est pesé avec ses deux bouchons, d'abord vide, puis avec la matière soumise à l'expérience. La différence des poids donne celui du corps introduit. Le tube est ensuite disposé sur le passage d'un courant de gaz ammoniac parfaitement sec; de nouvelles pesées répétées à quelques

heures d'intervalle permettent alors de connaître le poids de l'ammoniaque absorbée.

Lorsque je cherche à déterminer non-seulement la quantité de gaz combinée, mais en outre la tension de décomposition du composé produit, je me sers d'un tube IL fermé à l'une de ses extrémités H, qui contient la matière sur laquelle on veut opérer : l'extrémité ouverte est munie d'un robinet de verre MN relié à IL à l'aide d'un bon caoutchouc. Les deux tubes et le caoutchouc sont toujours pesés ensemble; on peut donc à chaque instant peser la matière sans la laisser arriver au contact de l'air; de plus, je peux faire le vide dans l'appareil, puis y faire entrer du gaz ammoniac. Pour cela, j'emploie une machine pneumatique de Geissler, construite très-habilement par M. Alvergniat et un peu modifiée d'après les indications de M. H. Sainte-Claire Deville. Cette machine permet, grâce à la perfection des robinets, de faire un vide presque parfait dans un petit espace, à condition toutefois qu'elle aura été desséchée avec soin. Il est facile de se faire une idée de cette machine par la *fig* 2. Elle se compose d'un tube de verre AB de 85 centimètres de longueur environ; de A part un long tube de caoutchouc terminé par un réservoir R rempli de mercure. La partie AB est surmontée d'une partie renflée BC munie d'un robinet de verre à trois voies D, dont la perfection constitue le principal mérite de l'appareil. En D viennent aboutir deux tubes : l'un, muni d'un robinet ordinaire L, est terminé par une petite cuve à mercure, il constitue l'orifice de sortie des gaz; l'autre, sur le trajet duquel se trouve un robinet à trois voies F, peut être mis en communication par FG ou FH, soit avec le tube IL, soit avec la source d'ammoniaque. Le vide est transmis de G en N par un tube de caoutchouc très-épais, capable de résister à la pression extérieure, et pouvant supporter à l'intérieur une pression de 3 atmosphères sans se déformer. On peut donc, à l'aide de cet appareil, faire le vide dans le tube IL, puis introduire du gaz ammoniac par KH; il suffira pour cela que le robinet F soit placé dans la position 2 ou 3, tandis que, pour faire le vide en IL, il occupe la position 1.

D'un autre côté, si les robinets sont ouverts convenablement, la pression de l'ammoniaque s'exerce sur le mercure contenu dans le tube AB; l'appareil fonctionne alors comme un manomètre à air libre, capable de mesurer des pressions comprises entre 0 et $2^{atm},5$.

Je suppose qu'il s'agisse d'abord de déterminer le poids d'ammoniaque qu'un corps est capable d'absorber à une température donnée : je pèse le tube IL vide avec le robinet MN, puis, après y avoir introduit une certaine quantité de matière, je pèse de nouveau : l'augmentation de poids donne le poids du chlorure introduit; je fais le vide complétement dans l'appareil, puis je laisse arriver l'ammoniaque par le robinet F. Au bout de quelques heures de contact, je fais une nouvelle pesée : l'augmentation de poids représente la quantité de gaz qui a été absorbée. Je recommence ainsi plusieurs fois jusqu'à ce que le poids de l'appareil reste constant; j'ai donc de la sorte le poids du corps et celui de l'ammoniaque absorbée. Une nouvelle détermination à un instant donné indique la quantité de gaz qui reste après un certain nombre d'expulsions. On peut donc de la sorte connaître quand on veut la quantité de gaz qui reste dans le composé sur lequel on opère.

Les supports PP, disposés les uns au-dessus des autres, permettent d'élever plus ou moins le réservoir de mercure, de manière à maintenir le volume du gaz presque constant, alors même que la pression vient à changer. La seule mesure à prendre en dehors de l'appareil est celle de la pression atmosphérique, et la hauteur barométrique, augmentée ou diminuée de la différence de niveau dans le réservoir mobile et dans le tube ABC, donne la pression du gaz. Le long du tube ABC se trouve appliquée une règle divisée en centimètres et millimètres; une lunette mobile, munie d'un réticule, permet de viser successivement les deux niveaux du mercure et de mesurer les différences de hauteur sur l'échelle ST.

Si l'on veut recueillir ou expulser une certaine quantité de gaz, il suffit de placer le robinet D dans la position c, puis de soulever jusqu'en R le réservoir, d'ouvrir E : le gaz traverse alors le mercure pour se rendre soit dans l'atmosphère, soit dans une cloche remplie de mercure et disposée au-dessus de l'orifice O. La manœuvre est la même que pour faire le vide dans l'appareil; on abaisse ensuite le réservoir après avoir fermé E, et on ramène le robinet D à sa première position; une nouvelle quantité de gaz arrive en BC. Il est alors possible, en opérant comme précédemment, de chasser une seconde fois le gaz contenu dans cette partie de l'appareil. Si à chaque instant le tube IL ne fournit pas une nouvelle quantité de gaz, le vide ne tarde pas à se faire d'une manière complète dans l'appareil. S'il y a quelque part un en-

droit par lequel l'air extérieur peut rentrer, on en est averti bien vite, car le mercure baisse alors dans le tube AB graduellement jusqu'à ce que le niveau soit le même dans les deux branches; de plus, l'analyse du gaz expulsé montre qu'il est en grande partie formé d'un gaz insoluble dans l'eau qui n'est autre que l'air ordinaire (*).

Le robinet E n'est pas essentiel dans la machine; mais il est très-commode pour éviter la rentrée du mercure; si, par mégarde, ce qui ne manque jamais d'arriver de temps en temps, on avait placé le robinet D dans la position inverse de c (4), le mercure pourrait alors pénétrer très-vite dans toute la partie EFG de l'appareil.

Il me reste maintenant à faire comprendre la méthode d'expérimentation dont je me suis servi pour déterminer les tensions de dissociation. Le tube IL contenant le composé ammoniacal est placé dans l'eau ou dans l'huile; un bec de gaz de Bunsen permet, en réglant convenablement la flamme, de maintenir une température sensiblement constante pendant assez longtemps, ou bien d'élever cette même température à un moment donné. Lorsque le thermomètre continue à indiquer le même degré pendant un certain temps, il suffit de suivre la marche du mercure et de mesurer la différence des niveaux, lorsque la hauteur dans le tube ABC est devenue constante. Le liquide étant agité fréquemment, le thermomètre donne sa température, et par suite celle du composé: la machine de Geissler fonctionne comme manomètre et donne la pression. Cette manière d'expérimenter est certainement la meilleure; mais elle est en réalité très-pénible, par la raison qu'il est extrêmement difficile de maintenir une température constante à 1 degré près, même pendant une demi-heure; de plus, la tension met en pareil cas un temps variable, mais souvent assez long, à atteindre sa valeur maximum. On ne peut donc employer ce procédé que dans des cas restreints, par exemple si l'on opère à la température ambiante, ou bien à celle de l'ébullition de l'eau ou d'une dissolution saline saturée.

(*) Du reste on reconnaît de suite si les fuites ont lieu par les robinets ou par les points de jonction des caoutchoucs avec le reste de l'appareil. Lorsque les robinets sont en bon état, il est impossible de distinguer leur séparation du milieu de la masse de verre; on distingue seulement les conduits dont ils sont percés. Si l'appareil est convenablement disposé, il peut rester plusieurs jours sans que la colonne mercurielle baisse de plus d'un à deux millimètres; elle indique seulement les variations barométriques ou thermométriques.

Dans le plus grand nombre de cas, les déterminations ont été faites par une méthode qui n'offre pas le même degré d'exactitude, mais qui cependant ne comporte que des erreurs très-faibles. Pour la faire bien comprendre, je suppose que j'aie à faire une mesure dans le voisinage de 40 degrés; j'élève la température lentement, de telle sorte que la matière du tube s'échauffe à peu près comme le liquide. Lorsque le thermomètre marque 41 ou 42 degrés, je diminue le jet de flamme, de manière à permettre à la température de diminuer un peu. En même temps, j'agite constamment le liquide et j'observe la marche du mercure dans le tube BC. Son niveau continue à descendre pendant quelque temps, mais avec une lenteur de plus en plus grande; il reste alors quelque temps stationnaire, puis bientôt le gaz ammoniac étant en partie réabsorbé par le corps soumis à l'expérience, le mercure prend une marche ascendante. Il y a donc un maximum de pression facile à observer dans le plus grand nombre des cas. Je mesure cette pression maximum, et je prends pour température celle du thermomètre au moment où s'est produit ce maximum. En effet, la marche de la température du liquide étant d'abord ascendante, on comprend que le tube plongé au milieu de ce liquide s'échauffe moins vite que lui; lorsque ensuite la température du liquide s'abaisse, le tube continue encore à s'échauffer pendant quelque temps, puis les deux corps sont à la même température; enfin le liquide se refroidit le premier, le corps soumis à l'expérience lui cède alors de la chaleur, et immédiatement une partie du gaz dégagé est de nouveau absorbée : le maximum de pression se produit donc à l'instant où les deux températures, celle du liquide et celle du tube, sont les mêmes. Dans les expériences bien faites du reste, il suffit que la température du liquide se soit abaissée de 1 à 2 degrés au plus au-dessous de sa température maximum pour atteindre le maximum de pression; l'ammoniaque est alors réabsorbée très-rapidement, en sorte qu'il est très-facile de saisir le moment auquel la pression atteint cette valeur maximum. On voit également qu'il y a toujours un grand avantage à opérer avec une grande masse de liquide, de manière à n'avoir que des variations thermométriques très-lentes.

Afin de reconnaître l'influence des quantités d'ammoniaque contenues dans le composé, j'ai presque toujours chassé, après chaque lecture, tout le gaz contenu dans le tube AB, c'est-à-dire un volume qui,

dans les cas où la pression était forte, peut être évalué à 300 centimètres cubes environ. Comme, dans le plus grand nombre des cas, le poids total de l'ammoniaque ne surpassait pas 2 grammes, ou même était inférieur à ce nombre, je chassais donc à chaque fois une proportion notable du gaz absorbé. Par suite, quand les résultats indiquent que la pression est constante à la même température, cela ne tient nullement à ce que les quantités d'ammoniaque sont demeurées sensiblement les mêmes, c'est que telle est bien la loi du phénomène.

Il est encore un dernier point qu'il est bon d'examiner : quelle est la limite d'exactitude qu'il est permis d'espérer dans des mesures de ce genre? La détermination des pressions se fait très-facilement à un millimètre près, mais, même en employant des thermomètres construits avec beaucoup de soin, on ne peut guère évaluer une température variable avec une approximation supérieure au demi-degré, surtout lorsque le corps sur lequel on opère est solide, pulvérulent, mauvais conducteur de la chaleur, et que le thermomètre est seulement dans la masse liquide au milieu de laquelle le corps est plongé. D'un autre côté, surtout lorsque les pressions deviennent fortes, une différence de 1 degré dans la température produit dans la pression un changement de plusieurs centimètres; on peut donc, en pareil cas, regarder comme égales deux tensions qui sont les mêmes à un ou deux centimètres près. C'est au reste seulement dans des cas exceptionnels que j'ai obtenu des divergences aussi grandes; le plus souvent, c'est à peine si l'on observe des divergences de quelques millimètres. De plus, l'étude que j'ai faite des tensions du gaz qu'abandonne le charbon ammoniacal, ou la solution de l'ammoniaque dans l'eau, montre que même, avec ce degré d'exactitude, il ne saurait y avoir le moindre doute sur la marche du phénomène.

Chlorure d'argent.

L'étude du chlorure d'argent ammoniacal offre un grand intérêt depuis que ce corps a été employé par Faraday pour la liquéfaction du gaz ammoniac; les conditions nécessaires pour la réussite de cette expérience classique, et même les phénomènes accessoires qui accompagnent la liquéfaction ne sont décrits, en général, que d'une manière

très-vague, et souvent les divers auteurs sont loin d'être d'accord. J'ai dû, par suite, étudier l'action de l'ammoniaque sur ce corps avec un soin tout particulier; je suis ainsi arrivé à me rendre parfaitement compte des circonstances dans lesquelles il est bon de se placer pour répéter facilement l'expérience de Faraday, et en même temps j'ai pu expliquer les divergences que présentent à ce sujet les différents auteurs.

J'ai fait passer du gaz ammoniac sur du chlorure d'argent à la température ambiante, qui était de 25 degrés, pendant douze heures consécutives; et j'ai répété l'expérience le lendemain, afin de m'assurer que le chlorure était bien saturé d'ammoniaque, à la température à laquelle j'opérais. J'ai trouvé de la sorte que $6^{gr},990$ de chlorure d'argent avaient absorbé $1^{gr},285$ d'ammoniaque; ce qui correspond très-sensiblement à la formule

$$2AgCl, 3AzH^3.$$

J'ai alors entouré de glace le tube à chlorure d'argent; après quatre heures de contact du gaz et du chlorure, dans ces conditions, la matière a été pesée de nouveau; l'ammoniaque absorbée pesait alors $2^{gr},560$, c'est-à-dire environ le double du poids primitif, ce qui correspond assez exactement à la formule

$$AgCl, 3AzH^3.$$

De nouvelles mesures, même à une température plus basse, ont donné les mêmes résultats.

Ainsi, selon toute apparence, l'ammoniaque forme, avec le chlorure d'argent, deux combinaisons : l'une prend naissance à 0 degré, l'autre aux environs de 25 degrés. L'étude du dégagement de l'ammoniaque contenue dans ces deux composés va nous donner de nouveaux renseignements sur les circonstances nécessaires à leur production.

En commençant par le chlorure d'argent saturé de gaz ammoniac à 0 degré et en opérant comme je l'ai indiqué au début, j'ai obtenu dans diverses expériences la série des tensions suivantes :

Tensions du gaz ammoniac dégagé du composé $AgCl, 3AzH^3$.

I.		II.		III.	
0°,0.....	293mm	0°,0.....	273mm	29°,0.....	1369mm
17,0.....	618	10,6.....	505	34,9.....	1844
17,5.....	655	16,6.....	598,5	48,5.....	2414
25,0.....	952	28,8.....	1355	31,0.....	1537
24,0.....	937	32,4.....	1596	47,0.....	3325
23,0.....	902	34,2.....	1713	51,5.....	4132
21,3.....	844			54,0.....	4641
21,0.....	801			57,0.....	4880*
21,0.....	801				

Les résultats indiqués dans la troisième série de nombres ont été obtenus en remplaçant le manomètre à air libre par un manomètre à air comprimé; de plus à la fin de l'expérience le gaz ammoniac était liquéfié dans l'appareil, le chlorure étant chauffé à 57 degrés; la pression de $4^m,880$, c'est-à-dire environ $6^{atm},5$ est donc celle qui convient pour liquéfier le gaz à la température de $13°,8$, qui était celle de l'air ambiant au moment de l'expérience; il est très-possible qu'une température de 56 degrés eût suffi pour obtenir ce résultat, car la pression reste constante aussitôt qu'on est arrivé à la liquéfaction.

La marche générale du phénomène est indiquée par la série des nombres obtenus, ou bien par la forme de la courbe, qui permet de saisir d'un coup d'œil l'ensemble des résultats obtenus.

Mais en même temps il se présente une question plus générale qu'il importe d'examiner.

Si un même corps forme avec l'ammoniaque plusieurs composés, les tensions observées en opérant de la sorte sont d'abord celles du composé le plus riche; en expulsant continuellement du gaz, il arrive un moment où la quantité d'ammoniaque qui reste en combinaison avec le corps n'est plus que celle qui constitue le deuxième composé, celui dont la force élastique à une température donnée est la plus faible. La température restant alors constante, la machine à chaque fois expulsera une partie du gaz qui remplit le tube IL et le conduit MNG, sans qu'il se dégage rien du chlorure ammoniacal, tant que la pression ne sera

pas inférieure à la force élastique du gaz émis par le deuxième composé à cette température : les pressions iront alors en diminuant rapidement; quant à la loi de leur succession, elle dépend du rapport des volumes de TLMNG et du réservoir BC. Il n'y a donc nullement à tenir compte des déterminations faites pendant cette période : aussitôt que la pression du gaz ammoniac dans l'appareil est au-dessous de la tension du deuxième composé, le phénomène de la constance reparait si la température est stationnaire; si la température augmente, on observe de nouveau la marche croissante des pressions. C'est ce qui se présente ici pour les deux composés que forme le chlorure d'argent en se combinant avec le gaz ammoniac; c'est encore ce que nous aurons souvent l'occasion d'observer pour les autres chlorures, tels que les chlorures de calcium, de zinc, etc., qui donnent plusieurs composés en s'unissant au gaz ammoniac.

Il est facile maintenant de voir pourquoi le composé $AgCl, 3AzH^3$ ne se forme pas quand le chlorure d'argent et l'ammoniaque sont en présence à la température de 25 degrés; en effet, à 21 degrés la tension du gaz dégagé de cette combinaison est déjà supérieure à la pression atmosphérique, et à 25 degrés cette tension est de 950 millimètres; il serait donc nécessaire pour que ce corps pût prendre naissance de soumettre l'ammoniaque à une pression supérieure à 950 millimètres. C'est ce qui arrive avec les appareils qui ont servi à liquéfier l'ammoniaque; même en été, le liquide ne tarde pas à disparaître, parce que la pression, à l'intérieur de l'appareil, est supérieure à la tension de l'ammoniaque à la température ambiante; en somme, les choses se passent exactement comme pour la vapeur d'eau, par exemple, qui, même à une température supérieure à 100 degrés, est ramenée à l'état liquide si l'on exerce sur elle une pression suffisante.

Les résultats de ces expériences sont d'accord avec les nombres donnés par Faraday, lequel nous a appris que le gaz ammoniac se liquéfie à zéro, sous une pression de $3^{atm},5$, le chlorure d'argent ammoniacal étant porté à une température de 40 degrés environ, et que la force élastique de ce liquide est de $6^{atm},5$ à 10 degrés.

Le second composé $2AgCl, 3AzH^3$ peut s'obtenir de deux manières, soit comme je l'ai dit en faisant passer le gaz ammoniac sur le chlorure d'argent à une température légèrement supérieure à 20 degrés, soit

encore en faisant absorber ce gaz au-dessous de cette température, et en maintenant ensuite le composé obtenu $AgCl, 3AzH^3$ à une température comprise entre 20 et 30 degrés, jusqu'à ce qu'il ne dégage plus d'ammoniaque sur la cuve à mercure.

L'étude des tensions de l'ammoniaque dégagée de ce deuxième composé, faite avec les mêmes précautions, a donné les résultats suivants :

Tensions de l'ammoniaque dégagée du composé $2AgCl, 3AzH^3$.

I.		II.	
68°,0	748^{mm}	20°,0	93^{mm}
69,0	771	31,0	125
70,0	814	47,0	268
69,0	786	58,5	528
68,0	757	64,0	682
70,2	834	71,5	946
70,5	846	77,5	1198
69,5	808	83,5	1593
68,0	750	85,2	1738
70,0	846	86,1	1813
68,0	746	88,5	2013
		103,0	4880*

La première série de nombres montre la constance de la tension du gaz ammoniac lorsque la température reste constante, bien qu'à chaque expérience j'aie expulsé de l'appareil 150 à 200 centimètres cubes d'ammoniaque à la pression atmosphérique. La seconde montre les variations de la pression lorsque la température vient à changer : les dernières mesures ont été faites à l'aide du manomètre à air comprimé; à 103 degrés, la température ambiante étant de 13°,8, le gaz s'est de nouveau liquéfié; il est donc possible de répéter l'expérience de Faraday avec l'un ou l'autre des composés que l'ammoniaque forme avec le chlorure d'argent. Seulement, en examinant le chlorure d'argent après l'expérience, dans ce dernier cas, on voit qu'il a fondu, en même temps qu'il a perdu son ammoniaque; ceci explique comment on a pu dire que dans la liquéfaction de l'ammoniaque le chlorure d'argent entre en fusion; mais cela a lieu seulement lorsqu'on se sert du composé $2AgCl, 3AzH^3$. En outre la matière étant devenue très-compacte ne

réabsorbe plus l'ammoniaque que très-difficilement et d'une manière incomplète.

Ainsi, lorsqu'on veut faire facilement la liquéfaction du gaz ammoniac, on sature une certaine quantité de chlorure d'argent sec entre 0 et 10 degrés, on le place dans un tube en U, à parois assez épaisses. Il suffit alors de chauffer un peu au-dessus de 40 degrés la branche qui contient le chlorure ammoniacal pour que le gaz vienne se liquéfier dans la deuxième branche maintenue à 0 degré; si l'on plonge cette branche dans l'eau à 13 degrés, il est nécessaire alors de chauffer le tube à 57 degrés.

Le composé $2AgCl, 3AzH^3$, maintenu pendant deux heures environ à une température comprise entre 68 et 70 degrés, dégage toute son ammoniaque sur la cuve à mercure; il n'y a donc pas d'autre composé et, par suite, le corps $2AgCl, 3AzH^3$ est bien celui qui entre en fusion à 103 degrés.

Il est facile de s'expliquer comment à l'air libre le chlorure d'argent ammoniacal perd tout le gaz qu'il avait absorbé, puisque ce gaz peut se répandre dans une atmosphère indéfinie d'un autre gaz, et que à 20 degrés sa tension est déjà de 93 millimètres; ce corps pour perdre son ammoniaque se trouve dans les mêmes conditions que de l'eau chauffée à 51 degrés et placée dans une atmosphère indéfinie d'air sec.

La méthode que nous venons d'appliquer donne lieu à une observation qui se comprend aisément : si l'on passe d'une pression à une autre en abaissant la température, les nombres obtenus sont en général un peu trop forts, parce que la masse poreuse ne se refroidit que très-lentement au centre, et la tension observée est toujours celle qui correspond aux points les plus chauds; inversement, si l'on a élevé la température, rien d'analogue n'est à craindre, à moins qu'il ne reste plus que très-peu du composé ammoniacal sur lequel on opère; il sera dans ce cas tout à fait nécessaire d'attendre très-longtemps pour que la chaleur pénètre jusqu'au centre.

Enfin l'examen des deux courbes qui représentent les tensions du gaz ammoniac dégagé nous montre que la première croît plus rapidement que la seconde avec la température; c'est là un fait général qui se reproduit dans la suite des expériences. Si nous considérons deux courbes qui correspondent à des composés dont la tension est de

760 millimètres à t et à t' degrés, si t est plus petit que t', les tensions indiquées pour la première croissent plus rapidement avec la température que celles données par la seconde.

Iodure d'argent.

Le chlorure d'argent absorbe très-rapidement le gaz ammoniac, la matière s'échauffe d'une manière très-sensible, en même temps elle augmente de volume : avec l'iodure d'argent l'action est au contraire excessivement lente, on n'observe ni augmentation de volume, ni dégagement de chaleur. Ainsi $10^{gr},345$ d'iodure d'argent se sont combinés avec $0^{gr},346$ d'ammoniaque, ce qui correspond à 0,46 d'équivalent d'ammoniaque pour 1 équivalent d'iodure. La formule de ce composé peut donc se représenter par

$$2AgI, AzH^3.$$

Le chlorure d'argent n'offre rien d'analogue. Il est impossible d'attribuer cette action de l'ammoniaque à la présence de chlorure d'argent dans l'iodure, ce dernier corps ayant été préparé par l'action directe de l'acide iodhydrique sur l'azotate d'argent. Aussitôt que le gaz ammoniac arrive au contact de l'iodure d'argent, la couleur, légèrement jaunâtre de ce corps, passe au blanc; l'action est donc très-rapide à la surface, mais elle ne pénètre que très-lentement dans l'intérieur de la masse, et l'absorption n'est pas encore complète au bout de huit à dix heures de passage du gaz.

Malgré la faible proportion d'ammoniaque contenue dans ce composé, j'ai cependant déterminé quelques pressions, en expulsant à chaque fois le gaz contenu dans l'appareil. Les résultats obtenus et la forme de la courbe semblent indiquer que dans ce composé la marche du phénomène est du même genre que dans les autres.

Série des tensions obtenues avec le composé $2AgI, AzH^3$.

20°,0	29mm
34,0	79
53,0	178
45,0	102
60,5	222
70,0	327
76,0	460
63,0	236

Cette série de tensions, quoique très-limitée, indique bien par la forme de la courbe que les tensions de dissociation de ce corps varient suivant la même loi générale que celle des autres composés.

Cyanure d'argent.

Au contact du gaz ammoniac, le cyanure d'argent s'échauffe d'une manière très-appréciable; l'absorption est rapide, et l'on observe une faible augmentation de volume : 3gr,580 ont absorbé 0gr,431 d'ammoniaque, ce que semble indiquer la formule

$$AgCy, AzH^3.$$

La quantité de gaz étant un peu faible, je me suis contenté de démontrer la constance de la pression lorsque la température reste invariable. Pour cela j'ai opéré à 100 degrés, et, à chaque mesure, j'ai expulsé tout le gaz contenu dans l'appareil.

Expériences sur le cyanure d'argent.

100°	548mm
100	548
100	552
100	549
100	546

Les tensions ont alors commencé à décroître très-rapidement, et la détermination en poids a montré qu'il ne restait plus d'ammoniaque dans le cyanure d'argent.

Chlorure de calcium.

L'action de l'ammoniaque sur le chlorure de calcium est extrêmement importante à cause de l'emploi habituel du chlorure de calcium comme corps desséchant, et de la production du chlorure de calcium lors de la préparation de l'ammoniaque.

Si l'on fait passer un courant de gaz ammoniac sur du chlorure de calcium sec, mais non fondu, le gaz est absorbé rapidement; la masse s'échauffe d'une manière très-notable, augmente considérablement de volume et se réduit en une poudre excessivement ténue; le volume apparent après l'absorption de l'ammoniaque est devenu environ quinze fois plus grand qu'il n'était avant l'expérience. Avec le chlorure de calcium fondu, l'action est très-lente; on n'observe aucun échauffement, la matière se réduit très-difficilement en poussière. Il n'y a néanmoins aucune différence essentielle avec le chlorure simplement desséché. La formule qui représente ce composé est

$$\mathrm{CaCl, 4AzH^3}.$$

Si l'on vient à le chauffer, le gaz ammoniac se dégage.

Tensions de dissociation du composé $\mathrm{CaCl, 4AzH^3}$.

I.		II.		III.	
0°,0.....	141mm	16°,4.....	321mm	38°,6.....	1055mm
11,2.....	241	21,4.....	426	42,6.....	1301
14,4.....	285	25,8.....	541	10,4.....	231
16,0.....	320	33,3.....	821	53,5.....	1916
17,6.....	330	41,8.....	1254	11,5.....	261
20,4.....	390			42,0.....	1271
25,6.....	530			43,4.....	1344
30,6.....	697				
34,8.....	871				
39,0.....	1081				
43,5.....	1351				
46,2.....	1551				

L'accord entre ces trois séries d'expériences est très-satisfaisant; la

dernière présente cette particularité, qu'on a fait varier considérablement la température entre deux mesures consécutives; malgré cela, les résultats sont entièrement d'accord avec les précédents.

Afin de reconnaitre ce qui peut arriver à la fin de l'expérience, j'ai néanmoins exécuté une nouvelle série de mesures accompagnées de déterminations fréquentes en poids, en enlevant une grande quantité de gaz à chaque fois pour savoir jusqu'à quel point la tension du gaz reste constante. C'est ainsi que j'ai obtenu la série IV.

Nouvelles tensions de dissociation du composé $CaCl, 4AzH^3$.

IV.

°	mm	°	mm
32,3	758	36,0	896
34,0	844	29,0	659
43,2	1345	32,5	755
42,0	1242	36,8	949
42,9	1329	42,1	1112
41,0	1222	51,0	1312
42,1	1246	47,0	1043
10,5	236	49,5	1125
25,8	527		

Les quatre dernières expériences sont complétement en désaccord avec les précédentes : elles indiquent, ou bien que l'appareil ne renferme plus d'ammoniaque, ou bien que l'on arrive à un nouveau composé, dont la tension est inférieure à celle du premier. Or, à ce moment, le poids de l'ammoniaque contenue dans ce composé est encore sensiblement la moitié de ce qu'il était primitivement; si nous continuons les mesures, en éliminant à chaque détermination une certaine quantité de gaz, nous trouvons la suite des tensions :

Tensions de dissociation du composé $CaCl, 2AzH^3$.

°	mm	°	mm
11,0	145	37,0	591
44,0	853	10,0	128
46,0	943	26,4	318
53,0	1218	34,0	451
43,5	840	41,0	363
40,6	701	173,0	360
37,0	595		

Ces trois dernières déterminations ne sont nullement d'accord avec les précédentes : elles indiquent des pressions beaucoup trop faibles; à ce moment, le poids de l'appareil montre qu'il reste encore 1 équivalent d'ammoniaque pour 1 de chlorure; il y a donc, selon toute apparence, un troisième composé $CaCl, AzH^3$.

Cette étude des composés ammoniacaux que donne le chlorure de calcium montre donc que ce corps se comporte comme le chlorure d'argent : il abandonne son ammoniaque à des températures variables suivant la nature du corps formé, la pression restant constante. Une vérification très-simple se présente naturellement : si ce que j'ai dit est exact, le chlorure de calcium pourrait être employé aussi bien que le chlorure d'argent pour la liquéfaction de l'ammoniaque. Pour faire cette expérience, j'ai fait passer pendant cinq heures, à une température inférieure à 30 degrés, du gaz ammoniac sur le chlorure de calcium ordinaire desséché; j'ai introduit la matière dans un tube en U, et il m'a suffi de chauffer ce tube à 76 degrés pour observer le phénomène de la liquéfaction, la partie froide du tube étant maintenue dans l'eau à la température de 12 degrés environ.

Il est un autre point dont l'examen offre quelque importance, c'est l'influence que peut avoir la présence d'un excès de chaux dans la production du gaz ammoniac. Suivant plusieurs auteurs, il se forme en pareil cas un oxychlorure de calcium qui n'absorbe plus l'ammoniaque. Afin de m'assurer de l'influence que peut avoir un excès de chaux, j'ai placé dans deux tubes identiques la même quantité de chlorhydrate d'ammoniaque pulvérisé avec soin; dans l'un de ces tubes, j'ai ajouté un poids de chaux vive exactement suffisant pour décomposer tout le chlorhydrate; j'ai mis dans l'autre une quantité de chaux double : les deux tubes placés ensemble dans le même bain d'huile se sont comportés identiquement de la même manière. Dans les deux cas, le dégagement d'ammoniaque à travers le mercure, c'est-à-dire à la pression ordinaire, commence vers 120 degrés; mais il est très-abondant à 150 degrés. Si l'on élève la température jusqu'à 200 ou 210 degrés, le dégagement s'arrête lorsqu'il ne reste plus de chlorhydrate d'ammoniaque. Pendant que l'un des tubes donne 75 bulles de gaz, l'autre en a fourni 76; il n'y a donc aucun avantage, sous le rapport de l'ammoniaque dégagée, à mettre dans l'appareil un grand excès de

chaux. Du reste, si le chlorure de calcium produit absorbe de l'ammoniaque, il l'abandonne au-dessous de 300 degrés, température bien inférieure à celle qu'on emploie pour la production de l'ammoniaque.

Un mélange de chlorure de calcium et de chaux vive, à équivalents égaux, fondus ensemble, donne un corps qu'on appelle l'*oxychlorure de calcium;* ce corps très-compacte n'absorbe pas l'ammoniaque, il est vrai; mais c'est là un fait général : tous les corps compactes qui ne peuvent que difficilement tomber en poussière ne se combinent que très-lentement avec le gaz ammoniac. Il en est ainsi pour le chlorure de calcium fondu : des morceaux un peu volumineux de ce corps ne sont pas entièrement pénétrés par le gaz ammoniac, même après douze heures de contact. Le protochlorure d'étain sec fondu, qui cependant s'unit au gaz ammoniac, reste inaltéré, excepté à la surface, lorsqu'on fait passer sur lui un courant de gaz ammoniac pendant un temps indéfini. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce qu'un corps très-compacte, comme l'oxychlorure de calcium fondu, n'absorbe pas l'ammoniaque; mais il faudrait au moins montrer que ce composé se forme dans la préparation de l'ammoniaque, et l'échauffement énorme qui se produit lorsqu'on traite par l'eau le résidu obtenu dans cette réaction, même alors que la quantité de chaux était simplement double de celle qui eût été strictement nécessaire, suffirait pour faire admettre l'opinion contraire.

Iodure de calcium.

L'iodure de calcium fondu absorbe rapidement le gaz ammoniac, en produisant un abondant dégagement de chaleur; en même temps, il tombe en poudre comme un corps qui se délite, et son volume devient dix à quinze fois plus considérable. $4^{gr},830$ d'iodure se sont combinés avec $1,594$ d'ammoniaque, ce qui indique pour la formule du composé résultant

$$CaI, 3AzH^3.$$

La production de ce corps étant accompagnée d'un vif dégagement de chaleur, on comprend qu'il sera nécessaire d'élever considérablement la température pour expulser l'ammoniaque; c'est, en effet, ce qui résulte de l'examen du tableau suivant dans lequel sont inscrites les tensions de dissociation de ce composé à diverses températures :

Tensions de dissociation du composé $CaI, 3AzH^3$.

126°,0.....	174mm	179°,0.....	1390mm	108°,0.....	104mm
153,5	584	185,5.....	1706	131,0 ...	214
172,5.....	1125	154,0.....	612	125,0.....	180
183,0.....	1542	172,0.....	1054	115,0.....	138
111,0.....	122	175,5.....	1286	140,5.....	366
164,0.....	836	154,0.....	607	172,0.....	1034
173,0.....	1131	170,0.....	997		

Indépendamment de ce composé, il en existe au moins un second; mais ce dernier cède son ammoniaque à une température telle, qu'il serait difficile de compter sur les mesures obtenues; je réserverai, par suite, la détermination des tensions de ce corps pour un travail ultérieur.

Chlorure de magnésium.

Le chlorure de magnésium anhydre fondu absorbe rapidement le gaz ammoniac; en même temps la masse s'échauffe énormément, le chlorure tombe en poudre et acquiert un volume qui est de quinze à vingt fois plus grand que le volume primitif du chlorure. Il se forme, en pareil cas, un composé ayant pour composition

$$MgCl, 3AzH^3.$$

L'étude des tensions de dissociation de ce corps présente de très-grandes difficultés; le maximum ne se produisant jamais que très-lentement, il est nécessaire de maintenir très-longtemps la température constante pour arriver à des résultats comparables. Aussi ce n'est qu'avec beaucoup de peine que j'ai pu établir la série des tensions suivantes, et même il est facile de voir entre elles des différences notables, dont rend bien compte au reste la difficulté des observations :

Tensions de dissociation du composé $MgCl, 3AzH^3$.

135°,0.....	635mm	140°,0.....	719mm	151°,0.....	1070mm
131,0.....	520	152,0.....	1199	149,0.....	915
137,2.....	656	157,0.....	1411	150,0.....	1020
160,5.....	1546	137,0.....	710	146,0.....	888
117,0.....	207	122,0	319	150,0.....	1100
135,0	662	133,0.....	542		

Malgré les divergences que présentent ces résultats, on voit, cependant, que l'ensemble de la courbe est du même genre que pour les composés précédents ; seulement on comprend, par ce fait même, combien il est difficile de faire des mesures exactes dans des conditions analogues.

Chlorure de zinc.

Comme le chlorure de calcium, le chlorure de zinc forme plusieurs composés avec l'ammoniaque. Si l'on fait passer sur du chlorure de zinc anhydre un courant d'ammoniaque, il se produit un abondant dégagement de chaleur. En même temps, la matière se délite ; son volume, après l'expérience, est devenu presque vingt fois plus grand que le volume primitif. On obtient ainsi un composé

$$ZnCl, 3AzH^3.$$

Les tensions du gaz ammoniac dégagé de cette combinaison sont données par la série des mesures suivantes :

Tensions de dissociation du composé $ZnCl, 3AzH^3$.

45°,0.....	399mm	78°,5.....	1722mm	49°,0	462mm
52,5.....	563	17,6.....	86	55,0.....	626
57,0.....	720	26,0.....	129	59,0.....	762
61,5.....	846	68,0.....	1108	17,6. ...	86
69,0.....	1164	16,4.....	82	36,8.....	271
74,0.....	1453	20,2	103	56,0.....	673
17,8.....	84	27,2.....	142	65,0.....	978
53,5.....	567	37,4.....	256	54,0.....	603
71,0	1187	16,8.....	82	67,0.....	1063
44,0.....	343	31,6.....	183	76,0.....	1578
56,0.....	656	60.8.....	828	69,0.....	1155
77,5.....	1672	68,5.....	1153	70,5.....	1218
64,2.....	947	67,0... .	1041	66,5.....	1014
67,0.....	1041				

Aprés une série d'expulsions faites à chaque mesure, la tension com-

mence à diminuer très-vite, et on ne tarde pas, en chassant de nouveau du gaz ammoniac, à retrouver une nouvelle série de tensions, constantes si la température est elle-même constante, variables du reste avec la température; ces nouvelles tensions correspondent à une nouvelle formule

$$ZnCl, 2AzH^3.$$

Ainsi $1^{gr},451$ de chlorure de zinc, chauffés entre 60 et 80 degrés, ont conservé, à la pression ordinaire, 707 d'ammoniaque. Les tensions obtenues dans ce deuxième cas ne diffèrent, du reste, pas énormément de celles obtenues dans le premier, tout en restant toujours très-notablement plus faibles à la même température que pour le composé

$$ZnCl, 3AzH^3.$$

Tensions de dissociation du composé $ZnCl, 2AzH^3$.

62,0°	225^{mm}	85°	635^{mm}	79,0°	489^{mm}
77,5	403	90	771	85,0	633
31,0	57	95	930	100,0	1095
46,0	107	100	1086	109,0	1555
61,5	222	50	119	112,5	1750
72,0	354	58	175	84,0	593
76,0	433	68	291	100,2	1105
82,0	556				

En continuant à expulser du gaz à 100 degrés, la pression continue à rester pendant quelque temps la même, c'est-à-dire 1100 millimètres environ; puis elle diminue brusquement et devient successivement 800, 600, 400,..., 100, etc. Il reste cependant encore dans le composé une certaine quantité d'ammoniaque; la balance indique qu'un équivalent de chlorure de zinc retient alors un équivalent de gaz ammoniac. Je n'ai fait qu'un assez petit nombre de déterminations sur ce corps, vu la température élevée à laquelle il se décompose. J'indiquerai cependant les résultats, afin de faire voir quelles sont les différences de température qui correspondent à la même tension dans des composés de formule différente.

Tensions de dissociation du composé $ZnCl, AzH^3$.

222°........	96mm	225°........	131mm
237........	238	253........	572
278........	845	297........	1021

Le nouveau composé fond à 255 degrés; le phénomène de la sursaturation vient alors compliquer les résultats. Il est nécessaire, avant d'obtenir une pression constante, d'agiter le liquide un grand nombre de fois; et même, comme toujours en pareil cas, il est difficile d'être certain du résultat.

Ainsi le chlorure de zinc forme, avec l'ammoniaque, trois composés, qui peuvent se représenter par les formules

$$ZnCl, 3AzH^3, \quad ZnCl, 2AzH^3, \quad ZnCl, AzH^3,$$

et les tensions de dissociation de ces divers composés sont constantes à la même température, mais croissent avec les températures d'une manière assez régulière.

Protochlorure de mercure.

Le protochlorure de mercure absorbe assez rapidement le gaz ammoniac; en même temps il devient noir, très-probablement par suite de la présence d'une trace d'humidité, et de la mise en liberté d'un peu de mercure très-divisé : $14^{gr},400$ de protochlorure ont absorbé $1^{gr},068$ d'ammoniaque, ce qui correspond à la formule

$$Hg^2Cl, AzH^3.$$

Le calomel ne forme avec l'ammoniaque qu'un seul composé; les tensions de dissociation observées pour ce composé suivent du reste une marche très-régulière :

Tensions de dissociation du composé Hg^2Cl, AzH^3.

163°,0.....	291mm	181°.......	599mm	173°,0.....	430mm
179,0.....	547	165.......	312	179,8	567
167,0.....	352	185.......	662	183,0.....	613
183,5.....	614	185.......	674	189,0.....	751
185,5.....	692	186.......	711	188,0.....	728
185,3.....	692	194.......	914	201,0.....	1055

A ce moment l'absence du gaz se fait sentir immédiatement, et une nouvelle détermination en poids montre qu'il ne reste plus de gaz ammoniac dans l'appareil. Le tableau des tensions et la forme de la courbe qui correspond à ce composé montrent très-nettement la marche générale du phénomène que je me suis proposé d'étudier.

Expériences sur le charbon.

Il semble évident, au premier abord, que le charbon, qui absorbe tous les gaz avec facilité, ne peut pas former avec eux de combinaisons définies; par suite, on est porté à penser que le phénomème ne sera plus régi par les mêmes lois; l'étude du dégagement du gaz ammoniac condensé par le charbon pourra donc offrir des particularités curieuses, en montrant la marche du dégagement des gaz alors qu'il n'y a pas combinaison, mais seulement condensation.

Pour faire l'expérience dans les meilleures conditions possibles, j'ai pris un morceau de charbon de bois que j'ai calciné dans un creuset fermé, rempli de charbon grossièrement concassé; ce charbon, encore chaud, a été introduit dans un tube fermé à l'une de ses extrémités. Afin d'enlever tous les gaz qu'il pouvait encore contenir, j'ai fait le vide dans le tube, tout en chauffant le charbon à la lampe à alcool; ainsi débarrassés autant que possible des gaz étrangers, les morceaux soumis à l'expérience pesaient $7^{gr},410$; le contact du gaz ammoniac a produit un dégagement de chaleur très-sensible; le poids du gaz absorbé a été de 763 milligrammes.

J'ai alors fait le vide de nouveau et chassé le gaz ammoniac en ayant

soin d'opérer, autant que possible, à la même température dans les diverses séries d'expériences; de plus, entre deux mesures consécutives, j'ai toujours chassé tout le gaz contenu dans l'appareil.

Série des tensions du gaz ammoniac dégagé du charbon.

0,0°	196mm	19,0°	123mm	100,0°	272mm
0,0	180	19,0	116	100,0	214
0,0	165	19,0	110	100,0	171
0,0	155	19,0	104	100,0	141
0,0	142	19,0	98	100,0	118
0,0	137	19,0	94	100,0	104
0,0	131	19,0	91	100,0	89
0,0	125	19,0	88	100,0	71
19,0	226	54,0	296	100,0	61
19,0	205	54,0	259	192,0	502
19,0	188	55,0	239	197,0	284
19,0	174	54,5	212	190,0	177
19,0	164	54,0	186	196,0	124
19,0	154	54,0	166	204,0	107
19,0	144	54,0	156	199,0	84
19,0	138	100,0	358	194,0	67
19,0	131				

Après avoir chassé de la sorte le gaz ammoniac à l'aide du vide et d'une température de 200 degrés environ, j'ai constaté que le charbon retenait encore 130 milligrammes de gaz qui ne s'est dégagé qu'à une température voisine du rouge, en chauffant le tube à la lampe à alcool; et même alors l'eau mise en contact avec ce charbon est devenue alcaline par suite de la présence d'une certaine quantité d'ammoniaque qui était restée unie au charbon.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur le tableau précédent pour voir que les tensions varient d'une manière continue à la même température, tout en augmentant du reste avec la température. L'étude de la dissociation permet donc d'établir une différence entre les phénomènes de combinaison véritable, et ceux qui sont analogues à ce que nous appelons *la dissolution*.

Solution aqueuse du gaz ammoniac.

J'ai voulu voir en même temps comment se comporte l'ammoniaque ordinaire étudiée d'une manière analogue : d'après les résultats que j'ai obtenus, l'ammoniaque à la température ordinaire se comporte comme une dissolution de gaz et non comme une combinaison définie.

Série des tensions du gaz ammoniac provenant de sa solution aqueuse.

21°,5.....	636mm	22°,5.....	360mm	47°,0.....	532mm
21,5.....	524	38,5.....	647	48,0.....	514
21,5.....	510	38,0.....	597	48,0.....	502
21,5.....	500	39,0.....	587	47,8.....	485
21,5.....	490	39,0.....	581	48,0.....	472
21,5.....	481	40,5.....	587	48,5.....	465
21,5.....	474	40,0.....	562	48,5.....	453
21,5.....	466	40,0.....	547	72,0.....	991
21,5.....	460	40,0.....	515	71,5.....	883
22,5.....	438	41,2.....	522	71,2.....	809
22,5.....	423	41,5.....	504	100,0.....	1764
22,5.....	406	43,5.....	532	100,0.....	1478
22,5.....	398	45,5.....	545	100,0.....	1248
22,5.....	383	47,0.....	562	100,0.....	1009
22,5.....	373				

La suite des expériences a été interrompue, bien qu'il restât encore une certaine quantité d'ammoniaque à expulser, parce que le liquide a été projeté dans l'appareil par suite du dégagement du gaz.

Il est bon de faire remarquer encore que le dégagement du gaz ne se fait que très-difficilement; à chaque fois il est nécessaire d'imprimer au tube un grand nombre de secousses pour éviter le phénomène de la sursaturation, et faire ainsi des déterminations exactes.

Quoi qu'il en soit, l'ensemble de ces mesures fait voir que les tensions à la même température varient avec la quantité d'ammoniaque que renferme la dissolution, et la comparaison des deux dernières séries d'expériences avec celles effectuées précédemment fait mieux

ressortir ce qu'il y a d'important dans les phénomènes de dissociation que j'ai étudiés.

Comme résultat de ces expériences je crois encore devoir signaler un grave inconvénient que présentent les machines dans lesquelles on emploie comme force motrice le gaz ammoniac dégagé de sa dissolution dans l'eau : la composition de la dissolution étant variable, il en résulte que la pression obtenue n'est pas la même à la même température, ce qui ne permet pas de régler le feu d'une manière uniforme.

CONCLUSIONS.

Il résulte de ce travail que les lois de la dissociation s'appliquent parfaitement aux composés que donne l'ammoniaque en s'unissant à certains chlorures; dans tous les cas la tension du gaz dégagé de la combinaison à une même température est constante, de plus elle croît régulièrement avec la température. Le meilleur moyen de se rendre compte du phénomène, c'est de l'assimiler, comme l'a fait dès le début de ses recherches M. H. Sainte-Claire Deville, à la production des vapeurs saturées dans le vide : *La décomposition des corps gazeux s'effectue comme la production des vapeurs au-dessus d'un liquide. Si l'on compare l'ébullition à la décomposition totale, la tension des vapeurs au-dessous du point d'ébullition sera équivalente à la tension de dissociation, ou décomposition partielle* (1).

Dans le cas particulier des composés solides, l'un des éléments pouvant prendre l'état gazeux, la décomposition totale correspond encore au phénomène de l'ébullition des liquides. Elle se produit comme elle chaque fois que la pression du gaz dégagé est ou peut rester inférieure à la force élastique maximum des gaz émis à la température que possède le composé. Il n'y a donc en quelque sorte pas de température à laquelle ces composés existent ou cessent d'exister, comme on peut dire pour les liquides qu'il n'y a pas de température précise à laquelle ils se réduisent en vapeur, la pression modifiant ou renversant com-

(*) *Leçons sur la Dissociation professées devant la Société chimique*, année 1864, p. 51.

plétement les phénomènes qui se produisent à une température déterminée. Ainsi à 0 degré le chlorure d'argent ammoniacal $AgCl, 3AzH^3$ se décompose entièrement si la pression exercée par le gaz ammoniac reste moindre que 300 millimètres; à 20 degrés il suffit pour la destruction de ce composé que la pression soit inférieure à 800 millimètres; mais à 54 degrés il faut, pour que ce corps existe, que le gaz exerce à sa surface une pression de 4640 millimètres. C'est pour cette raison que chaque fois qu'il s'agit de chasser une certaine quantité d'ammoniaque pour passer d'un composé donné à un autre, j'ai soin d'opérer sur la cuve à mercure : je puis de la sorte opérer constamment à la pression atmosphérique, ou du moins à une pression peu supérieure.

La combinaison correspond à la condensation des vapeurs, et elle est comme cette dernière accompagnée d'un dégagement de chaleur. Pour que la combinaison se produise, il faut que la pression du gaz soit supérieure à la tension de décomposition du composé, de même que la condensation n'a lieu à une température donnée que si la pression exercée sur la vapeur est supérieure à la force élastique maximum qu'elle possède à cette même température. C'est ainsi que pour former à 25 degrés le corps $AgCl, 3AzH^3$, qui possède à 20 degrés une tension d'une atmosphère, il est nécessaire de comprimer le gaz ammoniac en contact avec le chlorure d'argent. Si l'on abaisse la température, on produit la combinaison exactement comme, pour une vapeur, on détermine de la sorte la condensation; ainsi dans le cas du chlorure d'argent le composé $AgCl, 3AzH^3$ se forme déjà à 18 degrés, le gaz ammoniac étant soumis seulement à la pression ordinaire.

Il y a encore une autre considération qui montre combien est légitime cette assimilation. Si nous prenons les courbes qui représentent la série des tensions du gaz ammoniac provenant des divers composés, et si nous comparons ces courbes à celles que donnent les tensions de vapeur des liquides, comme l'eau et l'alcool par exemple, nous voyons que la forme est la même; ces lignes transportées parallèlement à elles-mêmes se superposent dans une grande étendue. Il est bon cependant de remarquer une loi générale : s'il s'agit de composés dans lesquels entre le même corps gazeux (c'est le cas actuel), la tension à partir de la même pression, 760 millimètres par exemple, croit

d'autant plus vite que cette pression se produit à une température plus basse, de telle sorte que la force élastique augmente plus rapidement avec la température pour celui des deux corps qui possède la tension 760 millimètres à une température plus basse. Du reste, cette différence est assez faible pour que, dans des limites même assez étendues, la loi de Dalton s'applique sensiblement aux phénomènes de dissociation dans les mêmes limites que pour la production des vapeurs.

Enfin, de même que la fixité du point d'ébullition d'un liquide à une pression donnée caractérise en général un composé, de même la constance de la tension de dissociation d'un corps indique d'une manière certaine l'existence d'un composé déterminé. Ce n'est pas une condition nécessaire pour que le composé qu'on étudie soit un corps nettement défini; car, toutes les fois que le dégagement ne pourra pas être suivi du phénomène inverse, on ne doit rien attendre d'analogue; mais on est évidemment en droit d'admettre l'existence d'un véritable composé chaque fois qu'on observe des tensions constantes à la même température, alors même que la quantité de gaz contenue dans le corps soumis à l'expérience a changé d'une manière considérable. C'est ainsi, par exemple, qu'en partant du composé

$$\mathrm{Ca\,Cl,\ 4\,Az\,H^3},$$

qui n'avait pas encore été défini, j'ai retrouvé les deux composés connus

$$\mathrm{Ca\,Cl,\ 2\,Az\,H^3} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ca\,Cl,\ Az\,H^3},$$

dont les tensions de dissociation sont inférieures à celles du premier composé. Il en est de même pour les combinaisons que forme le chlorure de zinc avec le gaz ammoniac.

On peut également, dans un grand nombre de circonstances, établir, grâce à l'étude de la dissociation, une différence entre les phénomènes de dissolution et ceux de combinaison. Dans ce dernier cas, excepté lorsque le composé détruit ne peut plus se reformer dans les conditions de l'expérience, la tension reste constante à la même température, pourvu qu'il reste assez de gaz pour remplir l'espace à la pression donnée. Dans les phénomènes de dissolution, la tension décroît conti-

nuellement à mesure que la quantité de gaz diminue, comme l'indiquait du reste la loi de solubilité des gaz. C'est ce qui résulte nettement des expériences que j'ai faites sur les tensions du gaz ammoniac dégagé soit de sa dissolution dans l'eau, soit du charbon qui a séjourné un certain temps au contact de ce gaz.

Qu'il me soit permis, en terminant, d'adresser des remerciments sincères à M. H. Sainte-Claire Deville et à M. Debray : leurs conseils et leurs exemples m'ont constamment guidé dans le cours de ce travail, et, s'il offre quelque intérêt, c'est à leur habile direction qu'il faut en attribuer le principal mérite.

SUR LE CALCUL NUMÉRIQUE

DES

PERTURBATIONS DES PETITES PLANÈTES

AU MOYEN DES QUADRATURES,

PAR M. L.-J. GRUEY,

AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ, ASTRONOME ADJOINT A L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Avant d'entrer en matière, rappelons quelques points de Mécanique céleste sur lesquels nous nous appuierons constamment dans la suite.

1. Le mouvement elliptique ou non troublé d'une planète est défini par les équations

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2 x_e}{dt^2}+\frac{f\mu}{r_e^3}x_e=0,\\ &\frac{d^2 y_e}{dt^2}+\frac{f\mu}{r_e^3}y_e=0,\\ &\frac{d^2 z_e}{dt^2}+\frac{f\mu}{r_e^3}z_e=0,\end{aligned}\right.$$

où x_e, y_e, z_e désignent les coordonnées rectilignes et rectangulaires de la planète, suivant trois directions constantes menées par le centre du Soleil; r_e la distance de ces deux corps, μ la somme $m+\mathrm{M}$ de leurs masses, f l'attraction mutuelle de deux unités de masse situées à

l'unité de distance. Le plan des x_e, y_e est en général l'écliptique d'une certaine époque choisie à l'avance.

Les coordonnées elliptiques tirées de ces équations sont fournies par le système de formules suivant :

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{array}{ll} u - e\sin u = nt + \varepsilon - \varpi = nt + \varkappa & (\varkappa = \varepsilon - \varpi) \\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u & \\ r_e = a(1 - e\cos u) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} & \\ \left.\begin{array}{l} x_e = r_e[\cos\theta\cos(v+\omega) - \sin\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi] \\ y_e = r_e[\sin\theta\cos(v+\omega) + \cos\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi] \\ z_e = r_e[\sin(v+\omega)\sin\varphi] \end{array}\right\} & (\omega = \varpi - \theta) \end{array}\right.$$

Les variables auxiliaires u et v représentent l'anomalie excentrique et l'anomalie vraie; les quantités constantes a, e, ε, ϖ, φ, θ représentent les éléments de l'orbite:

a le demi-grand axe,
e l'excentricité,
ε la longitude de l'époque,
ϖ la longitude du périhélie,
φ l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique,
θ la longitude du nœud ascendant;

n n'est pas une constante arbitraire, elle est liée à a par la relation $n = \sqrt{\frac{f\mu}{a^3}}$; elle représente le moyen mouvement angulaire de la planète en 1 jour solaire moyen; aux éléments ε et ϖ, on substitue souvent $\varkappa$ et ω, définis par les relations

$$\varkappa = \varepsilon - \varpi, \quad \omega = \varpi - \theta.$$

L'observation peut seule donner la valeur de ces six éléments. L'ascension droite et la déclinaison de la planète étant des fonctions déterminées de t, a, e, ε, ϖ, φ, θ, la connaissance de trois lieux géocentriques distincts et des époques correspondantes doit fournir six équations entre les éléments; mais la résolution de ces équations dépasse les

forces de l'analyse; c'est par une voie détournée que Gauss est arrivé à la solution complète du problème, dans son immortel *Theoria motus*.

2. Le mouvement troublé de la planète m est défini par les équations

$$
(\mathrm{C})\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{f\mu}{r^3}x=+\dfrac{dR}{dx},\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{f\mu}{r^3}y=+\dfrac{dR}{dy},\\[2mm] \dfrac{d^2z}{dt^2}+\dfrac{f\mu}{r^3}z=+\dfrac{dR}{dz}. \end{cases}
$$

La fonction R, dite *perturbatrice*, a pour expression

$$
R=-fm'\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}-\frac{1}{\rho'}\right)-fm''\left(\frac{xx''+\ldots}{r''^3}-\frac{1}{\rho''}\right)-\ldots,
$$

et, par suite,

$$
\frac{dR}{dx}=-fm'\left(\frac{x-x'}{\rho'^3}+\frac{x'}{r'^3}\right)-fm''\left(\frac{x-x''}{\rho''^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)-\ldots;
$$

$$
\frac{dR}{dy}=\ldots,\quad \frac{dR}{dz}=\ldots;
$$

m, x, y, z, r se rapportent à la planète troublée; m', x', y', z', r'; m'', x'', y'', z'', r'', ... aux diverses planètes troublantes. ρ', ρ'', ... sont les distances de la masse troublée m aux masses respectives m', m'', ...

Le mouvement de ces dernières masses est donné par des systèmes d'équations (C'), (C''), ... analogues au système (C); le nombre total des équations de ces divers systèmes est égal à celui des inconnues $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \ldots$.

On ne sait pas intégrer rigoureusement les équations (C), (C'), ..., et pour obtenir les valeurs de x, y, z, on procède par approximations successives. m', m'', ... étant de petites quantités relativement à μ, on néglige d'abord R, et l'intégration de (C) conduit aux coordonnées elliptiques x_e, y_e, z_e comme première approximation. On cherche ensuite suivant quelle loi les éléments a, e, ..., θ doivent varier avec le temps, pour que x_e, y_e, z_e, déterminés par les formules (B), soient respectivement égaux, à chaque instant, à x, y, z; on trouve que cette

loi est exprimée par les équations

$$
(\mathrm{D})\left\{
\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= +\frac{2}{na}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{(1-\sqrt{1-e^2})\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= +\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}+\frac{\sqrt{1-e^2}(1-\sqrt{1-e^2})}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{de}-\frac{2}{na}\frac{d\mathrm{R}}{da},\\
\frac{d\varpi}{dt} &= +\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{d\mathrm{R}}{de},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\theta}-\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{d\mathrm{R}}{d\varpi}+\frac{d\mathrm{R}}{d\varepsilon}\right),\\
\frac{d\theta}{dt} &= +\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\frac{d\mathrm{R}}{d\varphi}.
\end{aligned}\right.
$$

Le système (D) s'intègre lui-même par approximations successives. On y parvient en développant la fonction perturbatrice R en série ordonnée, suivant les produits et les puissances croissantes des excentricités et des inclinaisons e, φ, e', φ',.... Pour les planètes anciennes, ces quantités sont suffisamment petites, et la série converge assez rapidement pour qu'on puisse s'arrêter aux premiers termes; mais elles atteignent de grandes valeurs dans le cas des comètes et des planètes télescopiques : la convergence de la série n'est plus alors assurée, ou elle est si faible, qu'elle oblige à prendre un grand nombre de termes, ce qui engendre dans la pratique des difficultés presque insurmontables. Aussi a-t-on cherché des méthodes plus expéditives et toujours sûres pour calculer les perturbations des petites planètes, dont le nombre déjà si élevé s'accroît chaque jour.

3. M. Encke a publié successivement, en 1837 dans le *Berliner astronomisches Jahrburch*, et en 1852 dans les n^{os} 791, 792, 814 des *Astronomische Nachrichten*, deux méthodes qui sont aujourd'hui très-répandues en Allemagne et qui ne se distinguent pas essentiellement de celles que Laplace a données au livre IX, tome IV de sa *Mécanique céleste*, pour les perturbations des comètes. Dans la première méthode, on calcule pour des époques équidistantes les valeurs numériques des dérivées secondes relatives au temps des perturbations de x_e, y_e, z_e, et

on en conclut par une double quadrature les valeurs de ces perturbations aux mêmes époques. Dans la deuxième, on calcule pour des époques équidistantes les valeurs numériques des dérivées premières des éléments de l'orbite relatives au temps, et on en conclut par une quadrature simple les valeurs de ces éléments aux mêmes époques. On obtient ainsi les valeurs numériques, non la loi, des perturbations.

Nous présentons ici ces deux méthodes sous une forme plus simple et en grande partie nouvelle. Pour plus de clarté, nous divisons le travail en trois Sections : dans la Section I, nous donnons aux quantités dont les valeurs numériques sont demandées à des époques équidistantes une expression commode pour le calcul ; dans la Section II, nous établissons les formules de quadrature ; la Section III est consacrée à une application numérique des deux premières.

SECTION I.

4. *Première méthode.* — Les perturbations ξ, η, ζ, δr des coordonnées elliptiques de la planète et de son rayon vecteur sont, par définition,

$$\xi = x - x_e,$$
$$\eta = y - y_e,$$
$$\zeta = z - z_e,$$
$$\delta r = r - r_e.$$

Retranchons deux à deux les équations (A) des équations (C) correspondantes, nous aurons pour déterminer ξ, η, ζ les équations

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -f\mu\left(\frac{x}{r^3} - \frac{x_e}{r_e^3}\right) + \frac{dR}{dx},$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -f\mu\left(\frac{y}{r^3} - \frac{y_e}{r_e^3}\right) + \frac{dR}{dy},$$
$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -f\mu\left(\frac{z}{r^3} - \frac{z_e}{r_e^3}\right) + \frac{dR}{dz}.$$

Si nous développons par la série de Taylor, suivant ξ, η, ζ, δr, les

rapports $\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}$, nous aurons, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier,

$$\frac{x}{r^3} = \frac{x_e}{r_e^3} + \frac{1}{r_e^3}\left(\xi - 3\frac{x_e}{r_e}\delta r\right),$$
$$\frac{y}{r^3} = \frac{y_e}{r_e^3} + \frac{1}{r_e^3}\left(\eta - 3\frac{y_e}{r_e}\delta r\right),$$
$$\frac{z}{r^3} = \frac{z_e}{r_e^3} + \frac{1}{r_e^3}\left(\zeta - 3\frac{z_e}{r_e}\delta r\right).$$

La substitution de ces valeurs dans les équations précédentes leur donne la forme adoptée dans la pratique :

$$(\mathrm{E})\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -f\mu\dfrac{1}{r_e^3}\left(\xi - 3\dfrac{x_e}{r_e}\delta r\right) + \dfrac{d\mathrm{R}}{dx}, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -f\mu\dfrac{1}{r_e^3}\left(\eta - 3\dfrac{y_e}{r_e}\delta r\right) + \dfrac{d\mathrm{R}}{dy}, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -f\mu\dfrac{1}{r_e^3}\left(\zeta - 3\dfrac{z_e}{r_e}\delta r\right) + \dfrac{d\mathrm{R}}{dz}. \end{cases}$$

On remplacera x, y, z par x_e, y_e, z_e dans $\frac{d\mathrm{R}}{dx}, \frac{d\mathrm{R}}{dy}, \frac{d\mathrm{R}}{dz}$, car on ne commettra ainsi qu'une erreur de second ordre par rapport à R. Quant à δr, il sera fourni à notre degré d'approximation par la formule

$$\delta r = \frac{x_e}{r_e}\xi + \frac{y_e}{r_e}\eta + \frac{z_e}{r_e}\zeta.$$

Nous verrons dans les Sections suivantes comment on calcule les valeurs numériques des seconds membres des équations (E), et comment une double quadrature donne les valeurs correspondantes de ξ, η, ζ.

5. *Deuxième méthode.* — Nous devons chercher des expressions commodes pour le calcul numérique des dérivées des éléments relatives au temps. Celles qui sont fournies par les équations (D) ne sauraient convenir sous leur forme actuelle; mais, si nous remarquons que les dérivées de R relatives à x, y, z sont d'un calcul facile, nous serons conduits à exprimer $\frac{d\mathrm{R}}{da}, \frac{d\mathrm{R}}{de}, \ldots, \frac{d\mathrm{R}}{d\theta}$ au moyen de $\frac{d\mathrm{R}}{dx}, \frac{d\mathrm{R}}{dy}, \frac{d\mathrm{R}}{dz}$, et à substituer dans (D) les valeurs obtenues.

Soit λ un élément quelconque de l'orbite troublée, on a

$$\frac{d\mathrm{R}}{d\lambda} = \frac{d\mathrm{R}}{dx}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{d\mathrm{R}}{dy}\frac{dy}{d\lambda} + \frac{d\mathrm{R}}{dz}\frac{dz}{d\lambda}. \tag{1}$$

Il suffira donc, pour effectuer la transformation indiquée, de remplacer dans (1) $\frac{dx}{d\lambda}, \frac{dy}{d\lambda}, \frac{dz}{d\lambda}$ par leurs expressions tirées des équations (B), qui conviennent au mouvement troublé quand on y considère les éléments comme variables et qu'on y remplace x_e, y_e, z_e, r_e par x, y, z, r. Nous serons amenés ainsi à introduire les directions de trois droites, que nous définirons immédiatement.

Ces droites sont :

1° Le rayon vecteur r, qui fait avec les axes coordonnés les angles (r, x), (r, y), (r, z), tels que

$$(2)\quad \begin{cases} \cos(r, x) = \dfrac{x}{r} = \cos\theta\cos(v+\omega) - \sin\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi, \\[2ex] \cos(r, y) = \dfrac{y}{r} = \sin\theta\cos(v+\omega) + \cos\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi, \\[2ex] \cos(r, z) = \dfrac{z}{r} = \sin(v+\omega)\sin\varphi. \end{cases}$$

2° Le rayon vecteur s, perpendiculaire à r, et pour lequel on a, en remplaçant dans (2) v par $v+\frac{\pi}{2}$, ce qui revient à différentier (2) par rapport à v :

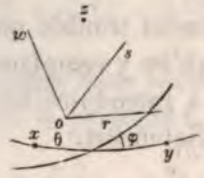
$$(3)\quad \begin{cases} \cos(s, x) = \dfrac{d\left(\dfrac{x}{r}\right)}{dv} = -\cos\theta\sin(v+\omega) - \sin\theta\cos(v+\omega)\cos\varphi, \\[3ex] \cos(s, y) = \dfrac{d\left(\dfrac{y}{r}\right)}{dv} = -\sin\theta\sin(v+\omega) + \cos\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi, \\[3ex] \cos(s, z) = \dfrac{d\left(\dfrac{z}{r}\right)}{dv} = \cos(v+\omega)\sin\varphi. \end{cases}$$

3° L'axe géométrique ow du plan de l'orbite, pour lequel on obtient,

en remplaçant dans (2) $(v+\omega)$ par $\frac{\pi}{2}$, et φ par $\varphi+\frac{\pi}{2}$:

$$(4)\qquad \begin{cases} \cos(w, x) = +\sin\theta\sin\varphi, \\ \cos(w, y) = -\cos\theta\sin\varphi, \\ \cos(w, z) = \cos\varphi. \end{cases}$$

Fig. 1.



6. Soit $\lambda = a, e, \varkappa$, ou l'un quelconque des éléments qui déterminent : les deux premiers, la forme de l'orbite ; le troisième, la position que la planète y occupe à l'époque prise pour origine.

On a, dans ce cas,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\lambda} &= [\cos\theta\cos(v+\omega) - \sin\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi]\frac{dr}{d\lambda} \\ &\quad + r[-\cos\theta\sin(v+\omega) - \sin\theta\cos(v+\omega)\cos\varphi]\frac{dv}{d\lambda} \\ &= \frac{x}{r}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{dv} r\frac{dv}{d\lambda}, \end{aligned}$$

et de même

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{y}{r}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{d\left(\frac{y}{r}\right)}{dv} r\frac{dv}{d\lambda},$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{z}{r}\frac{dr}{d\lambda} + \frac{d\left(\frac{z}{r}\right)}{dv} r\frac{dv}{d\lambda};$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\lambda} &= \frac{dr}{d\lambda}\cos(r, x) + r\frac{dv}{d\lambda}\cos(s, x), \\ \frac{dy}{d\lambda} &= \frac{dr}{d\lambda}\cos(r, y) + r\frac{dv}{d\lambda}\cos(s, y), \\ \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{dr}{d\lambda}\cos(r, z) + r\frac{dv}{d\lambda}\cos(s, z). \end{aligned}$$

Substituant dans l'équation (1) du n° 5, il vient

$$\frac{dR}{d\lambda} = \frac{dr}{d\lambda}\left[\frac{dR}{dx}\cos(r, x) + \frac{dR}{dy}\cos(r, y) + \frac{dR}{dz}\cos(r, z)\right]$$
$$+ r\frac{dv}{d\lambda}\left[\frac{dR}{dx}\cos(s, x) + \frac{dR}{dy}\cos(s, y) + \frac{dR}{dz}\cos(s, z)\right].$$

Soit P la force perturbatrice, (P, x), (P, y), (P, z) ses angles avec les axes, on sait que

$$\frac{dR}{dx} = P\cos(P, x),$$
$$\frac{dR}{dy} = P\cos(P, y),$$
$$\frac{dR}{dz} = P\cos(P, z);$$

on aura donc

$$(5)\qquad \frac{dR}{d\lambda} = \frac{dr}{d\lambda} P\cos(P, r) + r\frac{dv}{d\lambda} P\cos(P, s).$$

Il nous reste à calculer $\frac{dr}{d\lambda}$, $r\frac{dv}{d\lambda}$ pour les diverses valeurs de λ : $a, e, \varkappa$.

Les trois premières équations (B) donnent, en posant $p = a(1 - e^2)$ et $f\mu = k^2$,

$$\frac{dr}{da} = \frac{r}{a} - \frac{3}{2}\frac{kt}{a\sqrt{p}} e\sin v, \qquad \frac{dv}{da} = -\frac{3}{2}\frac{kt}{ar^2}\sqrt{p},$$
$$\frac{dr}{de} = -a\cos v, \qquad \frac{dv}{de} = \frac{(p+r)}{r(1-e^2)}\sin v,$$
$$\frac{dr}{d\varkappa} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} e\sin v, \qquad \frac{dv}{d\varkappa} = \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{r^2}.$$

Substituant dans l'équation (5), on a

$$\frac{dR}{da} = \left(\frac{r}{a} - \frac{3}{2}\frac{kt}{a\sqrt{p}} e\sin v\right) P\cos(P, r) - \frac{3}{2}\frac{k\sqrt{p}}{ar} t P\cos(P, s),$$
$$\frac{dR}{de} = -a\cos v\, P\cos(P, r) + \frac{(p+r)}{(1-e^2)}\sin v\, P\cos(P, s),$$
$$\frac{dR}{d\varkappa} = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} e\sin v\, P\cos(P, r) + \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{r} P\cos(P, s).$$

7. Soit $\lambda = \omega, \varphi, \theta$ ou l'un des éléments qui déterminent le plan de l'orbite et la situation de l'orbite dans son plan. On a, dans ces trois cas, et successivement :

1°

$$\frac{dx}{d\omega} = r\frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{d\omega} = r\frac{d\left(\frac{x}{r}\right)}{dv} = r\cos(s, x),$$

$$\frac{dy}{d\omega} = r\cos(s, y),$$

$$\frac{dz}{d\omega} = r\cos(s, z);$$

substituant dans l'équation (1), n° 5, il vient

$$\frac{dR}{d\omega} = r\left[\frac{dR}{dx}\cos(s, x) + \frac{dR}{dy}\cos(s, y) + \frac{dR}{dz}\cos(s, z)\right],$$

ou

$$\frac{dR}{d\omega} = rP\cos(P, s).$$

2°

$$\frac{dx}{d\varphi} = r\sin(v+\omega)\sin\theta\sin\varphi = r\sin(v+\omega)\cos(w, x),$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = -r\sin(v+\omega)\cos\theta\sin\varphi = r\sin(v+\omega)\cos(w, y),$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = r\sin(v+\omega)\cos\varphi = r\sin(v+\omega)\cos(w, z);$$

d'où

$$\frac{dR}{d\varphi} = r\sin(v+\omega)\left[\frac{dR}{dx}\cos(w, x) + \frac{dR}{dy}\cos(w, y) + \frac{dR}{dz}\cos(w, z)\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{dR}{d\varphi} = r\sin(v+\omega)P\cos(P, w).$$

3°

$$\frac{dx}{d\theta} = r[-\sin\theta\cos(v+\omega) - \cos\theta\sin(v+\omega)\cos\varphi] = -r\cos(r, y),$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos(r, x),$$

$$\frac{dz}{d\theta} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{dR}{d\theta} = r\left[-\frac{dR}{dx}\cos(r, y) + \frac{dR}{dy}\cos(r, x)\right]$$
$$= rP[-\cos Px \cos(r, y) + \cos Py \cos(r, x)];$$

transformons cette expression, on a

$$\cos(P, x) = \cos(P, r)\cos(r, x) + \cos(P, s)\cos(s, x) + \cos(P, w)\cos(w, x),$$
$$\cos(P, y) = \cos(P, r)\cos(r, y) + \cos(P, s)\cos(s, y) + \cos(P, w)\cos(w, y);$$

multipliant la première relation par $-\cos(r, y)$, la deuxième par $+\cos(r, x)$, et ajoutant, il vient

$$\begin{aligned} -\cos(P, x)\cos(r, y) + \cos(P, y)\cos(r, x) \\ = \cos(P, s)[-\cos(s, x)\cos(r, y) + \cos(s, y)\cos(r, x)] \\ + \cos(P, w)[-\cos(w, x)\cos(r, y) + \cos(w, y)\cos(r, x)]. \end{aligned}$$

Or, en vertu des relations (2) et (3) du n° 5 et des relations (2) et (4) du même numéro, on a

$$-\cos(s, x)\cos(r, y) + \cos(s, y)\cos(r, x) = \cos\varphi,$$
$$-\cos(w, x)\cos(r, y) + \cos(w, y)\cos(r, x) = -\sin\varphi\cos(v + \omega),$$

d'où

$$\frac{dR}{d\theta} = r\cos\varphi\, P\cos(P, s) - r\sin\varphi\cos(v + \omega)\, P\cos(P, w).$$

Nous avons ainsi en résumé

$$(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{dR}{da} &= \left(\frac{r}{a} - \frac{3}{2}\frac{kt}{a\sqrt{p}}\, e\sin v\right) P\cos(P, r) - \frac{3}{2}\frac{k\sqrt{p}}{ar}\, t\, P\cos(P, s),\\
\frac{dR}{de} &= -a\cos v\, P\cos(P, r) + \frac{(p + r)}{1 - e^2}\sin v\, P\cos(P, s),\\
\frac{dR}{d\chi} &= \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}\, e\sin v\, P\cos(P, r) + \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{r} P\cos(P, s),\\
\frac{dR}{d\omega} &= r P\cos(P, s),\\
\frac{dR}{d\varphi} &= r\sin(v + \omega) P\cos(P, w),\\
\frac{dR}{d\theta} &= r\cos\varphi\, P\cos(P, s) - r\sin\varphi\cos(v + \omega) P\cos(P, w).
\end{aligned}\right.$$

Remarquons que les dérivées partielles de R, relatives à a, e, $\varkappa$ sont indépendantes de $P\cos(P, w)$, ou de la projection de la force perturbatrice sur l'axe de l'orbite; et que les dérivées de R relatives à ω, φ, θ, sont indépendantes de $P\cos(P, r)$, ou de la projection de la force perturbatrice sur le rayon vecteur.

8. Avant de substituer les valeurs de ces dérivées dans les équations (D), nous transformerons ces dernières. Nous poserons $e = \sin\chi$, et à cause des relations $\varkappa = \varepsilon - \varpi$, $\omega = \varpi - \theta$, nous remplacerons

$$\frac{dR}{d\varepsilon} \text{ par } \frac{dR}{d\varkappa},$$

$$\frac{dR}{d\varpi} \text{ par } \frac{dR}{d\omega} - \frac{dR}{d\varkappa} = -\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} e \sin v \, P\cos(P, r) + \left(r - \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{r}\right) P\cos(P, s),$$

$$\frac{dR}{d\theta} \text{ par } \frac{dR}{d\theta} - \frac{dR}{d\omega} = -2r\sin^2\frac{\varphi}{2}\, P\cos(P, s) - r\sin\varphi\cos(v+\omega)\, P\cos(P, w);$$

nous formerons en outre $\dfrac{d\varkappa}{dt} = \dfrac{d\varepsilon}{dt} - \dfrac{d\varpi}{dt}$.

Cela fait, il vient, en substituant les valeurs fournies par les équations F pour les dérivées de R, en réunissant les termes en $P\cos(P, r)$, $P\cos(P, s)$, $P\cos(P, w)$, et effectuant les simplifications qui se présentent :

$$(G)\quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= +\frac{2}{n}\sqrt{\frac{a}{p}}\, e\sin v\, P\cos(P, r) + \frac{2}{nr}\sqrt{pa}\, P\cos(P, s),\\
\frac{de}{dt} &= +\frac{\cos^2\chi}{n\sqrt{pa}}\sin v\, P\cos(P, r) - \frac{\cos\chi}{na^2 e}\left(r - \frac{a\sqrt{pa}}{r}\cos\chi\right) P\cos(P, s),\\
\frac{d\varkappa}{dt} &= -\frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} - \frac{\cos^2\chi}{e}\cos v - \frac{3kte\sin v}{a\sqrt{p}}\right) P\cos(P, r)\\
&\qquad - \frac{1}{na^2}\left[\frac{(p+r)}{e}\sin v - \frac{3kt\sqrt{p}}{r}\right] P\cos(P, s),\\
\frac{d\varpi}{dt} &= -\frac{\cos\chi}{nae}\cos v\, P\cos(P, r) + \frac{(p+r)}{na^2 e\cos\chi}\sin v\, P\cos(P, s) + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt},\\
\frac{d\varphi}{dt} &= +\frac{r}{na^2\cos\chi}\cos(v+\omega)\, P\cos(P, w),\\
\frac{d\theta}{dt} &= +\frac{1}{na^2\cos\chi\sin\varphi}\, r\sin(v+\omega)\, P\cos(P, w).
\end{aligned}\right.$$

Remarquons que $\frac{da}{dt}$, $\frac{de}{dt}$, $\frac{d\varkappa}{dt}$, dépendent seulement de $P\cos(P, r)$, $P\cos(P, s)$; $\frac{d\varpi}{dt}$ des trois quantités $P\cos(P, r)$, $P\cos(P, s)$, $P\cos(P, w)$; $\frac{d\varphi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ de $P\cos(P, w)$ uniquement. Si l'on décompose à chaque instant t, la force perturbatrice P suivant les trois axes or, os, ow, et si l'on néglige les quantités du second ordre relativement aux masses perturbatrices dans les équations (G), on voit que, dans le temps dt, les composantes situées dans le plan de l'orbite agissent seules pour troubler les éléments a, e, $\varkappa$ étrangers à la situation du plan, tandis que la composante perpendiculaire à ce plan agit seule pour en altérer la position; quant à la situation du périhélie, elle varie sous l'action réunie des trois composantes.

9. Il est avantageux, dans la pratique, de substituer aux éléments a, e, $\varkappa$ les quantités n, χ déjà définies et l'anomalie moyenne M, qui leur sont liées par les relations

$$n^2a^3 = k^2,$$
$$e = \sin\chi,$$
$$M = nt + \varkappa,$$

d'où

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3n}{2a}\frac{da}{dt}, \quad \frac{d\chi}{dt} = \frac{1}{\cos\chi}\frac{de}{dt},$$

et désignant la perturbation de M par δM

$$\frac{d\delta M}{dt} = \int \frac{dn}{dt}dt + t\frac{dn}{dt} + \frac{d\varkappa}{dt},$$

ce qui conduit à

$$\frac{dn}{dt} = \frac{-3e}{\sqrt{pa}}\sin v\, P\cos(P, r) - \frac{3}{r}\sqrt{\frac{p}{a}}\, P\cos(P, s),$$

$$\frac{d\chi}{dt} = +\frac{\cos\chi}{n\sqrt{pa}}\sin v\, P\cos(P, r) - \frac{1}{na^2e}\left(r - \frac{a\sqrt{pa}}{r}\cos\chi\right) P\cos(P, s),$$

$$\frac{d\delta M}{dt} = \int \frac{dn}{dt}dt - \left(\frac{2r}{na^2} - \frac{\cos^2\chi}{nae}\cos v\right) P\cos(P, r) - \frac{p+r}{na^2e}\sin v\, P\cos(P, s).$$

Si l'on veut remplacer l'anomalie moyenne par la longitude moyenne L, on a

$$L = M + \varpi,$$

d'où

$$\frac{d\delta L}{dt} = \frac{d\delta M}{dt} + \frac{d\varpi}{dt},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\delta L}{dt} = \int \frac{dn}{dt}\,dt + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} - \left[\frac{2r}{na^2} + \frac{\cos\chi}{nae}\,2\sin^2\frac{\chi}{2}\cos v\right] P\cos(P, r)$$
$$+ \frac{2(p+r)}{na^2 e}\,\frac{\sin^2\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}\sin v\, P\cos(P, s),$$

ou

$$\frac{d\delta L}{dt} = \int \frac{dn}{dt}\,dt + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} - \left[\frac{2r}{na^2} + \frac{\cos\chi\,\mathrm{tang}\,\frac{\chi}{2}\cos v}{na}\right] P\cos(P, r)$$
$$+ \frac{(p+r)}{na^2}\,\frac{\mathrm{tang}\,\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}\sin v\, P\cos(P, s).$$

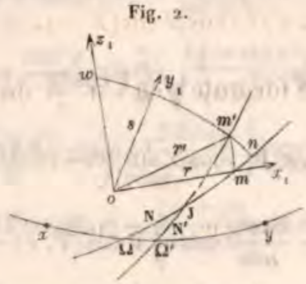
10. Nous devons actuellement calculer les composantes $P\cos(P, r)$, $P\cos(P, s)$, $P\cos(P\, w)$, de la force perturbatrice P, suivant les axes *or*, *os*, *ow*. Soient x_1, y_1, z_1 et $x'_1, y'_1, z'_1, x''_1, \ldots$, les coordonnées des planètes troublée et troublante rapportées à ces axes, on a

$$\begin{array}{lll}
x_1 = r, & x'_1 = r'\cos(r, r'), & x''_1 = r''\cos(r, r''), \\
y_1 = 0, & y'_1 = r'\cos(s, r'), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
z_1 = 0, & z'_1 = r'\cos(w, r'), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Cherchons $\cos rr'$, $\cos sr'$, $\cos wr'$; $\cos rr''$, ...

Pour cela, déterminons d'abord la position de l'orbite de m' par rapport à l'orbite de m.

Fig. 2.



Soient :

ΩJ l'orbite de la planète troublée m,

Ω'J celle de la planète troublante m'.

Connaissant θ, φ, θ' et φ', on peut obtenir $\Omega J = N$, $\Omega' J = N'$, et l'angle J par les formules connues

$$(6)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}J\sin\frac{1}{2}(N+N') = \sin\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi), \\ \sin\frac{1}{2}J\cos\frac{1}{2}(N+N') = \cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\sin\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi), \\ \cos\frac{1}{2}J\sin\frac{1}{2}(N-N') = \sin\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\cos\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi), \\ \cos\frac{1}{2}J\cos\frac{1}{2}(N-N') = \cos\frac{1}{2}(\theta'-\theta)\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi). \end{cases}$$

Menons, par le pôle (w) de l'orbite troublée et la planète troublante m', un grand cercle (w, m', n); la position de m' rapportée à l'orbite de m sera définie par

$$m'n = \beta',$$
$$Jn = \lambda'.$$

β' peut varier de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, et λ' de 0 à 2π; β' étant positif lorsque w et m' sont dans le même hémisphère relativement à l'orbite Ωm, négatif dans le cas contraire.

Le triangle sphérique rectangle $mm'n$ donne

$$\begin{aligned} \cos(r, r') = \cos\beta'\cos(\lambda' - Jm) &= \cos\beta'\cos[\lambda' - (\Omega m - N)] \\ &= \cos\beta'\cos[\lambda' - (\varpi - \theta + v - N)], \end{aligned}$$

ou, posant la constante $\varpi - \theta - N = \sigma$,

$$\cos(r, r') = \cos\beta'\cos[\lambda' - (v + \sigma)];$$

si l'on change dans cette formule v en $v + \frac{\pi}{2}$, on a

$$\cos(s, r') = \cos\beta'\sin[\lambda' - (v + \sigma)];$$

d'ailleurs

$$\cos(w, r') = \sin\beta'.$$

On conclut

$$(7)\quad \begin{cases} x'_1 = r'\cos\beta'\cos[\lambda' - (v + \sigma)], \\ y'_1 = r'\cos\beta'\sin[\lambda' - (v + \sigma)], \\ z'_1 = r'\sin\beta'; \end{cases}$$

Quant aux coordonnées β', λ', elles se tirent du triangle sphérique rectangle $Jm'n$, qui donne

$$(8)\quad \begin{cases} \cos\beta'\cos\lambda' = \cos J m' = \cos[l' - (\theta' + N')] = \cos(v' + \sigma'), \\ \cos\beta'\sin\lambda' = \sin[l' - (\theta' + N')]\cos J = \sin(v' + \sigma')\cos J, \\ \sin\beta' = \sin[l' - (\theta' + N')]\sin J = \sin(v' + \sigma')\sin J, \end{cases}$$

l' désignant la longitude vraie, dans son orbite, de la planète m'; v' son anomalie vraie, et σ' l'expression $\varpi' - \theta' - N'$.

Or

$$P\cos(P, r) = -fm'\left(\frac{x_1 - x'_1}{\rho'^3} + \frac{x'_1}{r'^3}\right) - fm''\left(\frac{x_1 - x''_1}{\rho''^3} + \frac{x''_1}{r''^3}\right) + \ldots,$$

$$P\cos(P, s) = -fm'\left(\frac{y_1 - y'_1}{\rho'^3} + \frac{y'_1}{r'^3}\right) - fm''\left(\frac{y_1 - y''_1}{\rho''^3} + \frac{y''_1}{r''^3}\right) + \ldots,$$

$$P\cos(P, w) = -fm'\left(\frac{z_1 - z'_1}{\rho'^3} + \frac{z'_1}{r'^3}\right) - fm''\left(\frac{z_1 - z''_1}{\rho''^3} + \frac{z''_1}{r''^3}\right) + \ldots;$$

les seconds membres sont donc connus par ce qui précède.

Nous poserons, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{r'^3} = \Delta',$$

$$\frac{1}{\rho''^3} - \frac{1}{r''^3} = \Delta'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et

$$P\cos(P, r) = fm'\left(-\frac{r}{\rho'^3} + x'_1\Delta'\right) + fm''\left(-\frac{r}{\rho''^3} + x''_1\Delta''\right) + \ldots = R_0 k^2,$$

$$P\cos(P, s) = fm'(y'_1\Delta') + fm''(y''_1\Delta'') + \ldots = S_0 k^2,$$

$$P\cos(P, w) = fm'(z'_1\Delta') + fm''(z''_1\Delta'') + \ldots = V_0 k^2.$$

11. Si nous substituons ces valeurs dans les équations (G) et dans celles qui donnent $\frac{dn}{dt}$, $\frac{d\chi}{dt}$, $\frac{d\delta M}{dt}$, $\frac{d\delta L}{dt}$, il vient :

$$\frac{da}{dt} = +\frac{2}{n}\sqrt{\frac{a}{p}}\, e\sin v\, R_0 k^2 + \frac{2}{nr}\sqrt{pa}\, S_0 k^2,$$

$$\frac{de}{dt} = +\frac{\cos^2\chi}{n\sqrt{pa}}\sin v\, R_0 k^2 - \frac{\cos\chi}{na^2 e}\left(r - \frac{a\sqrt{pa}}{r}\cos\chi\right) S_0 k^2,$$

$$\frac{d\varkappa}{dt} = -\frac{1}{na}\left(\frac{2r}{a} - \frac{\cos^2\chi}{e}\cos v - \frac{3ke}{a\sqrt{p}}\,t\sin v\right) R_0 k^2$$
$$-\frac{1}{na^2}\left(\frac{p+r}{e}\sin v - \frac{3k\sqrt{p}}{r}\,t\right) S_0 k^2,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\cos\chi}{nae}\cos v\, R_0 k^2 + \frac{p+r}{na^2 e\cos\chi}\sin v\, S_0 k^2 + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = +\frac{r}{na^2\cos\chi}\cos(v+\omega)\, W_0 k^2,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = +\frac{1}{na^2\cos\chi\sin\varphi}\, r\sin(v+\omega)\, W_0 k^2,$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3e}{\sqrt{pa}}\sin v\, R_0 k^2 - \frac{3}{r}\sqrt{\frac{p}{a}}\, S_0 k^2,$$

$$\frac{d\chi}{dt} = +\frac{\cos\chi}{n\sqrt{pa}}\sin v\, R_0 k^2 - \frac{1}{na^2 e}\left(r - \frac{a\sqrt{pa}}{r}\cos\chi\right) S_0 k^2,$$

$$\frac{d\delta M}{dt} = \int\frac{dn}{dt}\,dt - \left(\frac{2r}{na^2} - \frac{\cos^2\chi}{nae}\cos v\right) R_0 k^2 - \frac{p+r}{na^2 e}\sin v\, S_0 k^2,$$

$$\frac{d\delta L}{dt} = \int\frac{dn}{dt}\,dt + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} - \left(\frac{2r}{na^2} + \frac{\cos\chi\,\operatorname{tang}\frac{\chi}{2}}{na}\cos v\right) R_0 k^2$$
$$+\frac{(p+r)}{na^2}\,\frac{\operatorname{tang}\frac{\chi}{2}}{\cos\chi}\sin v\, S_0 k^2,$$

ou, en remplaçant n par $ka^{-\frac{3}{2}}$, ω par $\varpi - \theta$, et effectuant quelques simplifications,

$$\frac{da}{dt} = +2a^2 e\sin v\,\frac{kR_0}{\sqrt{p}} + \frac{2a^2}{r}\,p\,\frac{kS_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{de}{dt} = p\sin v\,\frac{kR_0}{\sqrt{p}} - \frac{p}{e}\left(\frac{r}{a} - \frac{p}{r}\right)\frac{kS_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\varkappa}{dt} = -\sqrt{\frac{p}{a}}\left(2r - \frac{p}{e}\cos v - \frac{3ke}{\sqrt{p}}\,t\sin v\right)\frac{kR_0}{\sqrt{p}}$$
$$-\sqrt{\frac{p}{a}}\left(\frac{p+r}{e}\sin v - \frac{3k\sqrt{p}}{r}\,t\right)\frac{kS_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{p\cos v}{e}\frac{k\mathrm{R}_0}{\sqrt{p}} + \frac{(p+r)}{e}\sin v\frac{k\mathrm{S}_0}{\sqrt{p}} + (1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = +r\cos(v+\varpi-\theta)\frac{k\mathrm{W}_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = +\frac{r\sin(v+\varpi-\theta)}{\sin\varphi}\frac{k\mathrm{W}_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3k}{\sqrt{a}}e\sin v\frac{k\mathrm{R}_0}{\sqrt{p}} - \frac{3k}{\sqrt{a}}\frac{p}{r}\frac{k\mathrm{S}_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\chi}{dt} = +a\cos\chi\sin v\frac{k\mathrm{R}_0}{\sqrt{p}} + a\cot\chi\left(\frac{p}{r}-\frac{r}{a}\right)\frac{k\mathrm{S}_0}{\sqrt{p}},$$

$$\frac{d\delta\mathrm{M}}{dt} = -(2r\cos\chi - p\cot\chi\cos v)\frac{k\mathrm{R}_0}{\sqrt{p}} - (p+r)\cot\chi\sin v\frac{k\mathrm{S}_0}{\sqrt{p}} + \int\frac{dn}{dt}dt,$$

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\mathrm{L}}{dt} = &-\left(2r\cos\chi + p\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\chi\cos v\right)\frac{k\mathrm{R}_0}{\sqrt{p}} + (p+r)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\chi\sin v\frac{k\mathrm{S}_0}{\sqrt{p}}\\ &+(1-\cos\varphi)\frac{d\theta}{dt} + \int\frac{dn}{dt}dt.\end{aligned}$$

Ce sont précisément les formules d'Encke; nous montrerons, dans la section III, comment on calcule méthodiquement les valeurs numériques des seconds membres, quand on leur a fait subir une dernière transformation que nous allons expliquer.

Comme, dans la pratique, il est commode, pour la division du travail, d'évaluer séparément les perturbations dues à chaque planète, il nous suffira d'introduire seulement l'une d'elles dans les formules définitives, soit m'.

Posons pour abréger l'écriture, en désignant par α un coefficient indéterminé dont nous verrons l'usage dans les sections suivantes,

$$(1) = \frac{km'}{\sqrt{p}}\,\alpha\,\frac{1}{\sin 1''}, \qquad (5) = \frac{1}{e},$$

$$(2) = \frac{1}{\sin\varphi}, \qquad (6) = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi,$$

$$(3) = a\cos\chi, \qquad (7) = \frac{3ke}{\sqrt{a}}\,\alpha,$$

$$(4) = \frac{p}{e}, \qquad (8) = \frac{3kp}{\sqrt{a}}\,\alpha.$$

$$(9) = p \tang \frac{1}{2}\chi, \qquad (12) = p \cot \frac{1}{2}\chi,$$
$$(10) = 2\cos\chi, \qquad (13) = \cot\chi,$$
$$(11) = \tang \frac{1}{2}\chi, \qquad \upsilon = v + \varpi - \theta.$$

Réduisons R_0, S_0, W_0 au terme en m', et remarquons que m étant négligeable, $f = k^2$, si on prend la masse M du Soleil pour unité; nous aurons alors :

$$\frac{k}{\sqrt{p}}\frac{\alpha}{\sin 1''} R_0 = \frac{k}{\sqrt{p}}\frac{\alpha}{\sin 1''} m'\left(-\frac{r}{\rho'^3} + x'_1\,\Delta'\right) = (1)\left(-\frac{r}{\rho'^3} + x'_1\,\Delta'\right) = R'_0,$$
$$\frac{k}{\sqrt{p}}\frac{\alpha}{\sin 1''} S_0 = \frac{k}{\sqrt{p}}\frac{\alpha}{\sin 1''} m'(y'_1\,\Delta') = (1)(y'_1\,\Delta') = S'_0,$$
$$\frac{k}{\sqrt{p}}\frac{\alpha}{\sin 1''} W_0 = \frac{k}{\sqrt{p}}\frac{\alpha}{\sin 1''} m'(z'_1\,\Delta') = (1)(z'_1\,\Delta') = W'_0,$$

R'_0, S'_0, W'_0 désignant respectivement $(1)\left(-\frac{r}{\rho'^3} + x'_1\,\Delta'\right)$, $(1)(y'_1\,\Delta')$, $(1)(z'_1\,\Delta')$.

Par suite, le système d'équations différentielles que nous venons d'obtenir, réduit aux sept dernières seules usitées, prend la forme

$$(\mathrm{H})\left\{\begin{aligned}
&\alpha\frac{d\varpi}{dt} = -(4)\cos v\,R'_0 + (5)\left(\frac{p}{r}+1\right) r\sin v\,S'_0 + (6)\,r\sin\upsilon\,W'_0,\\
&\alpha\frac{d\varphi}{dt} = r\cos\upsilon\,W'_0,\\
&\alpha\frac{d\theta}{dt} = (2)\,r\sin\upsilon\,W'_0,\\
&\alpha^2\frac{dn}{dt} = -(7)\sin v\,R'_0 - (8)\frac{1}{r}S'_0,\\
&\alpha\frac{d\psi}{dt} = (3)\sin v\,R'_0 + (3)(\cos v + \cos u)\,S'_0,\\
&\alpha\frac{d\delta M}{dt} = [(12)\cos v - (10)\,r]\,R'_0 - (13)\left(\frac{p}{r}+1\right) r\sin v\,S'_0 + \alpha\int\frac{dn}{dt}\,dt,\\
&\alpha\frac{d\delta L}{dt} = -[(9)\cos v + (10)\,r]\,R'_0 + (11)\left(\frac{p}{r}+1\right) r\sin v\,S'_0\\
&\qquad + (6)\,r\sin\upsilon\,W'_0 + \alpha\int\frac{dn}{dt}\,dt,
\end{aligned}\right.$$

à laquelle nous nous arrêtons.

Cette forme offre l'avantage de séparer nettement les grandeurs (1), (2),..., (13) qui ne varient pas sensiblement, pendant un certain temps, des autres grandeurs telles que v, r,..., dont la variation est rapide; elle fournit d'ailleurs les variations des éléments exprimées en secondes d'angle.

SECTION II.

12. La résolution numérique des équations E et H nous conduit au problème suivant :

Connaissant les valeurs d'une fonction du temps à certaines époques particulières et équidistantes, calculer les intégrales première et seconde de cette fonction.

Soient $u = f(t)$ la fonction; t_{-1}, t_0, t_1,..., t_n les valeurs attribuées à t; u_{-1}, u_0, u_1,..., u_n les valeurs correspondantes de u; $t_n = t_0 + n\alpha$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et α la raison de la progression que forment toujours dans la pratique les valeurs de t. Supposons en outre la série de Taylor applicable à la fonction u.

Une valeur quelconque de t étant mise sous la forme $t_{n+z} = t_n + z\alpha$, on peut développer u suivant les puissances croissantes de z; désignons ce développement par u_{n+z}, on a

$$u_{n+z} = u_n + \left(\frac{du}{dt}\right)_n \frac{\alpha}{1} z + \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_n \frac{\alpha^2}{1.2} z^2 + \ldots + \left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots;$$

ou posant, pour abréger l'écriture,

$$\left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} = a_n^k,$$

$$(1) \qquad u_{n+z} = u_n + a_n^1 z + a_n^2 z^2 + a_n^3 z^3 + \ldots + a_n^k z^k + \ldots,$$

il suffira de connaître a_n^1, a_n^2,..., a_n^k pour avoir u sous une forme facile à intégrer. Nous déterminerons ces quantités au moyen de ..., u_{-1},

$u_0, u_1, \ldots$ et de leurs différences, dont voici le tableau :

$$
\begin{array}{ccccc}
\vdots & & & & \\
u_{-2} & & & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{3}{2}} & & & \\
u_{-1} & & \Delta^2 u_{-1} & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{-\frac{1}{2}} & \\
u_0 & & \Delta^2 u_0 & & \Delta^4 u_0 \\
 & \Delta^1 u_{\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{\frac{1}{2}} & \\
u_1 & & \Delta^2 u_1 & & \\
 & \Delta^1 u_{\frac{3}{2}} & & & \\
u_2 & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Chaque différence est écrite entre les deux nombres dont elle résulte et à leur droite; l'indice de u y est égal à la moyenne arithmétique des indices dans ces deux nombres. Ainsi les différences de divers ordres de u_n sont désignées généralement par $\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}}$ et se trouvent sur la ligne oblique qui part de u_n, tandis que l'indice de u est constant sur une même ligne horizontale et l'ordre des différences toujours pair ou impair sur cette ligne.

Nous désignerons la moyenne arithmétique de u_n, u_{n+1}, par $u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}}$, et celle de $\Delta^p u_k$, $\Delta^p u_{k+1}$, par $\Delta^{\cdot p} u_{k+\frac{1}{2}}$. Ces moyennes arithmétiques complètent pour ainsi dire les lignes horizontales, qui ne présentent qu'un terme dans leur rencontre avec deux lignes verticales consécutives.

Une ligne horizontale complétée de la sorte, par l'intercalation des moyennes arithmétiques des différences immédiatement adjacentes deux à deux de part et d'autre de cette ligne, est de la forme, si son premier terme est u_n,

$$u_n, \quad \Delta^{\cdot 1} u_n, \quad \Delta^2 u_n, \quad \Delta^{\cdot 3} u_n, \ldots, \quad \Delta^{\cdot 2p-1} u_n, \quad \Delta^{2p} u_n, \ldots,$$

nous la désignerons par le nom de *ligne* (n).

Une ligne horizontale complète détermine toutes les autres. Nous établirons dès maintenant des formules qui nous serviront plus tard, pour passer de la ligne (n) à la ligne voisine $\left(n - \frac{1}{2}\right)$, ou inversement.

Cette forme offre l'avantage de séparer nettement les grandeurs (1), (2),..., (13) qui ne varient pas sensiblement, pendant un certain temps, des autres grandeurs telles que v, r,..., dont la variation est rapide; elle fournit d'ailleurs les variations des éléments exprimées en secondes d'angle.

SECTION II.

12. La résolution numérique des équations E et H nous conduit au problème suivant :

Connaissant les valeurs d'une fonction du temps à certaines époques particulières et équidistantes, calculer les intégrales première et seconde de cette fonction.

Soient $u = f(t)$ la fonction; t_{-1}, t_0, t_1,..., t_n les valeurs attribuées à t; u_{-1}, u_0, u_1,..., u_n les valeurs correspondantes de u; $t_n = t_0 + n\alpha$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et α la raison de la progression que forment toujours dans la pratique les valeurs de t. Supposons en outre la série de Taylor applicable à la fonction u.

Une valeur quelconque de t étant mise sous la forme $t_{n+z} = t_n + z\alpha$, on peut développer u suivant les puissances croissantes de z; désignons ce développement par u_{n+z}, on a

$$u_{n+z} = u_n + \left(\frac{du}{dt}\right)_n \frac{\alpha}{1} z + \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_n \frac{\alpha^2}{1.2} z^2 + \ldots + \left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots;$$

ou posant, pour abréger l'écriture,

$$\left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} = a_n^k,$$

$$(1) \qquad u_{n+z} = u_n + a_n^1 z + a_n^2 z^2 + a_n^3 z^3 + \ldots + a_n^k z^k + \ldots,$$

il suffira de connaître a_n^1, a_n^2,..., a_n^k pour avoir u sous une forme facile à intégrer. Nous déterminerons ces quantités au moyen de .... t_{-1},

u_0, u_1, ... et de leurs différences, dont voici le tableau :

$$
\begin{array}{lllll}
\vdots & & & & \\
u_{-2} & & & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{3}{2}} & & & \\
u_{-1} & & \Delta^2 u_{-1} & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{-\frac{1}{2}} & \\
u_0 & & \Delta^2 u_0 & & \Delta^4 u_0 \\
 & \Delta^1 u_{\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{\frac{1}{2}} & \\
u_1 & & \Delta^2 u_1 & & \\
 & \Delta^1 u_{\frac{3}{2}} & & & \\
u_2 & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Chaque différence est écrite entre les deux nombres dont elle résulte et à leur droite; l'indice de u y est égal à la moyenne arithmétique des indices dans ces deux nombres. Ainsi les différences de divers ordres de u_n sont désignées généralement par $\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}}$ et se trouvent sur la ligne oblique qui part de u_n, tandis que l'indice de u est constant sur une même ligne horizontale et l'ordre des différences toujours pair ou impair sur cette ligne.

Nous désignerons la moyenne arithmétique de u_n, u_{n+1}, par $u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}}$, et celle de $\Delta^p u_k$, $\Delta^p u_{k+1}$, par $\Delta^{\cdot p} u_{k+\frac{1}{2}}$. Ces moyennes arithmétiques complètent pour ainsi dire les lignes horizontales, qui ne présentent qu'un terme dans leur rencontre avec deux lignes verticales consécutives.

Une ligne horizontale complétée de la sorte, par l'intercalation des moyennes arithmétiques des différences immédiatement adjacentes deux à deux de part et d'autre de cette ligne, est de la forme, si son premier terme est u_n,

$$u_n, \quad \Delta^{\cdot 1} u_n, \quad \Delta^2 u_n, \quad \Delta^{\cdot 3} u_n, \ldots, \quad \Delta^{\cdot 2p-1} u_n, \quad \Delta^{2p} u_n, \ldots,$$

nous la désignerons par le nom de *ligne* (n).

Une ligne horizontale complète détermine toutes les autres. Nous établirons dès maintenant des formules qui nous serviront plus tard, pour passer de la ligne (n) à la ligne voisine $\left(n - \frac{1}{2}\right)$, ou inversement.

Cette forme offre l'avantage de séparer nettement les grandeurs (1), (2),..., (13) qui ne varient pas sensiblement, pendant un certain temps, des autres grandeurs telles que v, r,..., dont la variation est rapide; elle fournit d'ailleurs les variations des éléments exprimées en secondes d'angle.

SECTION II.

12. La résolution numérique des équations E et H nous conduit au problème suivant :

Connaissant les valeurs d'une fonction du temps à certaines époques particulières et équidistantes, calculer les intégrales première et seconde de cette fonction.

Soient $u = f(t)$ la fonction; t_{-1}, t_0, t_1,..., t_n les valeurs attribuées à t; u_{-1}, u_0, u_1,..., u_n les valeurs correspondantes de u; $t_n = t_0 + n\alpha$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et α la raison de la progression que forment toujours dans la pratique les valeurs de t. Supposons en outre la série de Taylor applicable à la fonction u.

Une valeur quelconque de t étant mise sous la forme $t_{n+z} = t_n + z\alpha$, on peut développer u suivant les puissances croissantes de z; désignons ce développement par u_{n+z}, on a

$$u_{n+z} = u_n + \left(\frac{du}{dt}\right)_n \frac{\alpha}{1} z + \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_n \frac{\alpha^2}{1.2} z^2 + \ldots + \left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots;$$

ou posant, pour abréger l'écriture,

$$\left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} = a_n^k,$$

$$(1) \qquad u_{n+z} = u_n + a_n^1 z + a_n^2 z^2 + a_n^3 z^3 + \ldots + a_n^k z^k + \ldots,$$

il suffira de connaître a_n^1, a_n^2,..., a_n^k pour avoir u sous une forme facile à intégrer. Nous déterminerons ces quantités au moyen de ..., u_{-1},

$u_0, u_1, \ldots$ et de leurs différences, dont voici le tableau :

$$
\begin{array}{ccccc}
\vdots & & & & \\
u_{-2} & & & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{3}{2}} & & & \\
u_{-1} & & \Delta^2 u_{-1} & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{-\frac{1}{2}} & \\
u_0 & & \Delta^2 u_0 & & \Delta^4 u_0 \ldots \\
 & \Delta^1 u_{\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{\frac{1}{2}} & \\
u_1 & & \Delta^2 u_1 & & \\
 & \Delta^1 u_{\frac{3}{2}} & & & \\
u_2 & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Chaque différence est écrite entre les deux nombres dont elle résulte et à leur droite; l'indice de u y est égal à la moyenne arithmétique des indices dans ces deux nombres. Ainsi les différences de divers ordres de u_n sont désignées généralement par $\Delta^p u_{n+\frac{1}{2}p}$ et se trouvent sur la ligne oblique qui part de u_n, tandis que l'indice de u est constant sur une même ligne horizontale et l'ordre des différences toujours pair ou impair sur cette ligne.

Nous désignerons la moyenne arithmétique de u_n, u_{n+1}, par $u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}}$, et celle de $\Delta^p u_k$, $\Delta^p u_{k+1}$, par $\Delta^{\cdot p} u_{k+\frac{1}{2}}$. Ces moyennes arithmétiques complètent pour ainsi dire les lignes horizontales, qui ne présentent qu'un terme dans leur rencontre avec deux lignes verticales consécutives.

Une ligne horizontale complétée de la sorte, par l'intercalation des moyennes arithmétiques des différences immédiatement adjacentes deux à deux de part et d'autre de cette ligne, est de la forme, si son premier terme est u_n,

$$u_n, \quad \Delta^{\cdot 1} u_n, \quad \Delta^2 u_n, \quad \Delta^{\cdot 3} u_n, \ldots, \quad \Delta^{\cdot 2p-1} u_n, \quad \Delta^{2p} u_n, \ldots,$$

nous la désignerons par le nom de *ligne* (n).

Une ligne horizontale complète détermine toutes les autres. Nous établirons dès maintenant des formules qui nous serviront plus tard, pour passer de la ligne (n) à la ligne voisine $\left(n - \frac{1}{2}\right)$, ou inversement.

Cette forme offre l'avantage de séparer nettement les grandeurs (1), (2),..., (13) qui ne varient pas sensiblement, pendant un certain temps, des autres grandeurs telles que v, r,..., dont la variation est rapide; elle fournit d'ailleurs les variations des éléments exprimées en secondes d'angle.

SECTION II.

12. La résolution numérique des équations E et H nous conduit au problème suivant :

Connaissant les valeurs d'une fonction du temps à certaines époques particulières et équidistantes, calculer les intégrales première et seconde de cette fonction.

Soient $u = f(t)$ la fonction; t_{-1}, t_0, t_1,..., t_n les valeurs attribuées à t; u_{-1}, u_0, u_1,..., u_n les valeurs correspondantes de u; $t_n = t_0 + n\alpha$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et α la raison de la progression que forment toujours dans la pratique les valeurs de t. Supposons en outre la série de Taylor applicable à la fonction u.

Une valeur quelconque de t étant mise sous la forme $t_{n+z} = t_n + z\alpha$, on peut développer u suivant les puissances croissantes de z; désignons ce développement par u_{n+z}, on a

$$u_{n+z} = u_n + \left(\frac{du}{dt}\right)_n \frac{\alpha}{1} z + \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_n \frac{\alpha^2}{1.2} z^2 + \ldots + \left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots;$$

ou posant, pour abréger l'écriture,

$$\left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} = a_n^k,$$

$$(1) \qquad u_{n+z} = u_n + a_n^1 z + a_n^2 z^2 + a_n^3 z^3 + \ldots + a_n^k z^k + \ldots,$$

il suffira de connaître a_n^1, a_n^2,..., a_n^k pour avoir u sous une forme facile à intégrer. Nous déterminerons ces quantités au moyen de ..., u_{-1},

$u_0, u_1, \ldots$ et de leurs différences, dont voici le tableau :

$$
\begin{array}{lllll}
\vdots & & & & \\
u_{-2} & & & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{3}{2}} & & & \\
u_{-1} & & \Delta^2 u_{-1} & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{-\frac{1}{2}} & \\
u_0 & & \Delta^2 u_0 & & \Delta^4 u_0 \\
 & \Delta^1 u_{\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{\frac{1}{2}} & \\
u_1 & & \Delta^2 u_1 & & \\
 & \Delta^1 u_{\frac{3}{2}} & & & \\
u_2 & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Chaque différence est écrite entre les deux nombres dont elle résulte et à leur droite; l'indice de u y est égal à la moyenne arithmétique des indices dans ces deux nombres. Ainsi les différences de divers ordres de u_n sont désignées généralement par $\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}}$ et se trouvent sur la ligne oblique qui part de u_n, tandis que l'indice de u est constant sur une même ligne horizontale et l'ordre des différences toujours pair ou impair sur cette ligne.

Nous désignerons la moyenne arithmétique de u_n, u_{n+1}, par $u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}}$, et celle de $\Delta^p u_k$, $\Delta^p u_{k+1}$, par $\Delta^{\cdot p} u_{k+\frac{1}{2}}$. Ces moyennes arithmétiques complètent pour ainsi dire les lignes horizontales, qui ne présentent qu'un terme dans leur rencontre avec deux lignes verticales consécutives.

Une ligne horizontale complétée de la sorte, par l'intercalation des moyennes arithmétiques des différences immédiatement adjacentes deux à deux de part et d'autre de cette ligne, est de la forme, si son premier terme est u_n,

$$u_n, \quad \Delta^{\cdot 1} u_n, \quad \Delta^2 u_n, \quad \Delta^{\cdot 3} u_n, \ldots, \quad \Delta^{\cdot 2p-1} u_n, \quad \Delta^{2p} u_n, \ldots,$$

nous la désignerons par le nom de *ligne* (n).

Une ligne horizontale complète détermine toutes les autres. Nous établirons dès maintenant des formules qui nous serviront plus tard, pour passer de la ligne (n) à la ligne voisine $\left(n - \frac{1}{2}\right)$, ou inversement.

Cette forme offre l'avantage de séparer nettement les grandeurs (1), (2),..., (13) qui ne varient pas sensiblement, pendant un certain temps, des autres grandeurs telles que v, r,..., dont la variation est rapide; elle fournit d'ailleurs les variations des éléments exprimées en secondes d'angle.

SECTION II.

12. La résolution numérique des équations E et H nous conduit au problème suivant :

Connaissant les valeurs d'une fonction du temps à certaines époques particulières et équidistantes, calculer les intégrales première et seconde de cette fonction.

Soient $u = f(t)$ la fonction; t_{-1}, t_0, t_1,..., t_n les valeurs attribuées à t; u_{-1}, u_0, u_1,..., u_n les valeurs correspondantes de u; $t_n = t_0 + n\alpha$, n étant un nombre entier positif ou négatif, et α la raison de la progression que forment toujours dans la pratique les valeurs de t. Supposons en outre la série de Taylor applicable à la fonction u.

Une valeur quelconque de t étant mise sous la forme $t_{n+z} = t_n + z\alpha$, on peut développer u suivant les puissances croissantes de z; désignons ce développement par u_{n+z}, on a

$$u_{n+z} = u_n + \left(\frac{du}{dt}\right)_n \frac{\alpha}{1} z + \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_n \frac{\alpha^2}{1.2} z^2 + \ldots + \left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots;$$

ou posant, pour abréger l'écriture,

$$\left(\frac{d^ku}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} = a_n^k,$$

$$(1) \qquad u_{n+z} = u_n + a_n^1 z + a_n^2 z^2 + a_n^3 z^3 + \ldots + a_n^k z^k + \ldots,$$

il suffira de connaître a_n^1, a_n^2,..., a_n^k pour avoir u sous une forme facile à intégrer. Nous déterminerons ces quantités au moyen de ..., u_{-1},

u_0, u_1, ... et de leurs différences, dont voici le tableau :

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & & & \\
u_{-2} & & & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{3}{2}} & & & \\
u_{-1} & & \Delta^2 u_{-1} & & \\
 & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{-\frac{1}{2}} & \\
u_0 & & \Delta^2 u_0 & & \Delta^4 u_0 \\
 & \Delta^1 u_{\frac{1}{2}} & & \Delta^3 u_{\frac{1}{2}} & \\
u_1 & & \Delta^2 u_1 & & \\
 & \Delta^1 u_{\frac{3}{2}} & & & \\
u_2 & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Chaque différence est écrite entre les deux nombres dont elle résulte et à leur droite; l'indice de u y est égal à la moyenne arithmétique des indices dans ces deux nombres. Ainsi les différences de divers ordres de u_n sont désignées généralement par $\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}}$ et se trouvent sur la ligne oblique qui part de u_n, tandis que l'indice de u est constant sur une même ligne horizontale et l'ordre des différences toujours pair ou impair sur cette ligne.

Nous désignerons la moyenne arithmétique de u_n, u_{n+1}, par $u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}}$, et celle de $\Delta^p u_k$, $\Delta^p u_{k+1}$, par $\Delta^{\cdot p} u_{k+\frac{1}{2}}$. Ces moyennes arithmétiques complètent pour ainsi dire les lignes horizontales, qui ne présentent qu'un terme dans leur rencontre avec deux lignes verticales consécutives.

Une ligne horizontale complétée de la sorte, par l'intercalation des moyennes arithmétiques des différences immédiatement adjacentes deux à deux de part et d'autre de cette ligne, est de la forme, si son premier terme est u_n,

$$u_n, \quad \Delta^{\cdot 1} u_n, \quad \Delta^2 u_n, \quad \Delta^{\cdot 3} u_n, \ldots, \quad \Delta^{\cdot 2p-1} u_n, \quad \Delta^{2p} u_n, \ldots,$$

nous la désignerons par le nom de *ligne* (n).

Une ligne horizontale complète détermine toutes les autres. Nous établirons dès maintenant des formules qui nous serviront plus tard, pour passer de la ligne (n) à la ligne voisine $\left(n-\frac{1}{2}\right)$, ou inversement.

Cette dernière ligne est, en vertu des définitions précédentes,

$$u\cdot_{n-\frac{1}{2}},\quad \Delta^1 u_{n-\frac{1}{2}},\quad \Delta\cdot^2 u_{n-\frac{1}{2}},\ldots,\quad \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}},\quad \Delta\cdot^{2p} u_{n-\frac{1}{2}},\ldots.$$

Or, on a, par définition,

$$\Delta^{2p} u_n - \Delta^{2p} u_{n-1} = \Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}},$$
$$\Delta^{2p} u_n + \Delta^{2p} u_{n-1} = 2\Delta\cdot^{2p} u_{n-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\Delta^{2p} u_n = \Delta\cdot^{2p} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}};$$

on a aussi, par définition,

$$\Delta^{2p-1} u_{n+\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} = \Delta^{2p} u_n,$$
$$\Delta^{2p-1} u_{n+\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} = 2\Delta\cdot^{2p-1} u_n;$$

d'où, retranchant ces relations l'une de l'autre et transportant $\Delta\cdot^{2p-1} u_n$ dans le premier membre,

$$\Delta\cdot^{2p-1} u_n = \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_n = \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta\cdot^{2p} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}};$$

on trouverait de la même manière les relations inverses pour passer de la ligne $\left(n-\frac{1}{2}\right)$ à la ligne (n) ; en les réunissant aux premières, nous avons le système des formules suivantes :

$$(2)\qquad \Delta^{2p} u_n = \Delta\cdot^{2p} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}},$$

$$(3)\qquad \Delta\cdot^{2p-1} u_n = \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta\cdot^{2p} u_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}},$$

$$(4)\qquad \Delta\cdot^{2p} u_{n-\frac{1}{2}} = \Delta^{2p} u_n - \frac{1}{2}\Delta\cdot^{2p+1} u_n + \frac{1}{4}\Delta^{2p+2} u_n,$$

$$(5)\qquad \Delta^{2p-1} u_{n-\frac{1}{2}} = \Delta\cdot^{2p-1} u_n - \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_n.$$

13. Cherchons maintenant la relation qui existe entre les coefficients $a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^k$ et la différence d'ordre p de u_{n+h}, h étant entier.

L'équation (1), n° **12**, donne, pour $z = h$, $z = h + 1$,

$$u_{n+h} = u_n + a_n^1 h + a_n^2 h^2 + a_n^3 h^3 + \ldots,$$

$$u_{n+h+1} = u_n + a_n^1 (h + 1) + a_n^2 (h + 1)^2 + a_n^3 (h + 1)^3 + \ldots,$$

d'où

$$\Delta^1 u_{n+h+\frac{1}{2}} = a_n^1[(h+1) - h] + a_n^2[(h+1)^2 - h^2] + \ldots,$$

qui, pour h augmenté de 1, est

$$\Delta^1 u_{n+h+\frac{3}{2}} = a_n^1[(h+2) - (h+1)] + a_n^2[(h+2)^2 - (h+1)^2] + \ldots;$$

donc

$$\Delta^2 u_{n+h+1} = a_n^1[(h+2) - 2(h+1) + h] + a_n^2[(h+2)^2 - 2(h+1)^2 + h^2] + \ldots$$

Admettons que la loi qui se manifeste déjà soit vraie pour la différence d'ordre $p - 1$, on aura

$$\Delta^{p-1} u_{n+h+\frac{p-1}{2}} = a_n^1\left[(h+p-1) - \frac{p-1}{1}(h+p-2) + \ldots \mp h\right]$$
$$+ a_n^2[(h+p-1)^2 - \ldots \pm h^2] + \ldots,$$

les coefficients des parenthèses comprises dans un même crochet étant ceux de la puissance $(p-1)^{\text{ième}}$ du binône $(x - 1)$.

Retranchons cette relation membre à membre de celle obtenue, en y changeant h en $h + 1$; il vient

$$\Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}} = a_n^1[(h+p) - p(h+p-1) + \ldots \pm h]$$
$$+ a_n^2[(h+p)^2 - \ldots \mp h^2] + \ldots,$$

ce qui démontre que la loi est vraie quel que soit p. Posons

$$q_k = (h+p)^k - p(h+p-1)^k + \frac{p(p-1)}{1.2}(h+p-2)^k + \ldots \mp p(h+1)^k \pm h^k,$$

on aura

$$\Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}} = a_n^1 q_1 + a_n^2 q_2 + \ldots + a_n^k q^k + \ldots.$$

Les coefficients q sont indépendants de t_n, α et de la fonction u.

Si nous prenons $u = t^p$, nous aurons

$\Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}} = 1.2.3\ldots p\alpha^p$, quels que soient n et h; et $a_n^k = 0$, pour $k > p$.

Donc, dans ce cas,

$$1.2.3\ldots p\,\alpha^p = a_n^1 q_1 + a_n^2 q_2 + \ldots + a_n^k q_k + \ldots + a_n^p q_p.$$

Cette relation ayant lieu quel que soit t_n, dont les puissances décroissantes $t_n^{p-1}, t_n^{p-2}, \ldots, t_n^0$, entrent comme facteur dans $a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^p$, on a nécessairement

$$q_p = 1.2.3\ldots p \quad \text{et} \quad q_k = 0, \quad \text{pour} \quad k < p.$$

Nous obtenons ainsi une généralisation de la propriété bien connue du polynôme

$$p^k - p(p-1)^k + \frac{p(p-1)}{1.2}(p-2)^k + \ldots \pm p,$$

que l'on obtient en faisant $h = 0$ dans q_k. Il en résulte pour $\Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}}$ l'expression plus simple que celle qui précède

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta^p u_{n+h+\frac{p}{2}} &= a_n^p\left[(h+p)^p - \frac{p}{1}(h+p-1)^p + \ldots \pm h^p\right] \\ &\quad + a_n^{p+1}\left[(h+p)^{p+1} - \ldots \pm h^{p+1}\right] + \ldots; \end{aligned}\right.$$

pour $h = 0$, on a

$$\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} = a_n^p\left[p^p - p(p-1)^p + \ldots \pm p\,1^p\right] + a_n^{p+1}\left[p^{p+1} - \ldots \pm p\,1^{p+1}\right] + \ldots,$$

expression qui est de la forme

$$(l)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} &= a_n^p\left[l_p^0 p^p + l_p^1 (p-1)^p + \ldots + l_p^{p-1} 1^p\right] \\ &\quad + a_n^{p+1}\left[l_p^0 p^{p+1} + \ldots + l_p^{p-1} 1^{p+1}\right] + \ldots \text{(*)}. \end{aligned}\right.$$

14. La relation (6), pour n et h constants et p variable, donne les différences successives de u_{n+h} formant avec ce nombre une même ligne oblique du tableau des différences. Nous pouvons aussi en tirer en fonc-

(*) La forme (l) suppose $p > 0$.

tion de $a'_n, \ldots, a^k_n, \ldots$, les différences situées sur la même ligne horizontale que u_{n+h} et les moyennes arithmétiques de celles qui sont deux à deux situées immédiatement de part et d'autre de cette ligne, c'est-à-dire $\Delta^{2p} u_{n+h}$ et $\Delta^{\cdot 2p+1} u_{n+h}$.

Si nous faisons successivement dans l'équation (6)

$$h + \frac{p}{2} = h', \qquad p = 2p', \qquad \text{d'où} \qquad h + p = h' + p', \qquad h = h' - p';$$

$$h + \frac{p}{2} = h' - \frac{1}{2}, \quad p = 2p' + 1, \qquad \text{»} \qquad h + p = h' + p', \qquad h = h' - p' - 1;$$

$$h + \frac{p}{2} = h' + \frac{1}{2}, \quad p = 2p' + 1, \qquad \text{»} \qquad h + p = h' + p' + 1, \quad h = h' - p',$$

nous aurons, en supprimant les accents après substitution,

$$(7)\left\{\begin{aligned} \Delta^{2p} u_{n+h} = a_n^{2p} &\left[(h+p)^{2p} - \frac{2p}{1}(h+p-1)^{2p} + \ldots + (h-p)^{2p}\right] \\ &+ a_n^{2p+1}[(h+p)^{2p+1} - \ldots] + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(8)\left\{\begin{aligned} &\Delta^{2p+1} u_{n+h-\frac{1}{2}} \\ &\quad = a_n^{2p+1}\left[(h+p)^{2p+1} - \frac{2p+1}{1}(h+p-1)^{2p+1} + \ldots - (h-p-1)^{2p+1}\right] \\ &\quad + a_n^{2p+2}[(h+p)^{2p+2} - \ldots] + \ldots, \end{aligned}\right.$$

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\Delta^{2p+1} u_{n+h+\frac{1}{2}} \\ &\quad = a_n^{2p+1}\left[(h+p+1)^{2p+1} - \frac{2p+1}{1}(h+p)^{2p+1} + \ldots - (h-p)^{2p+1}\right] \\ &\quad + a_n^{2p+2}[(h+p+1)^{2p+2} - \ldots] + \ldots. \end{aligned}\right.$$

On tirera des deux dernières égalités $\Delta^{\cdot 2p+1} u_{n+h}$, qui est par définition :

$$\Delta^{\cdot 2p+1} u_{n+h} = \frac{1}{2}\left[\Delta^{2p+1} u_{n+h-\frac{1}{2}} + \Delta^{2p+1} u_{n+h+\frac{1}{2}}\right].$$

Si l'on fait $h = 0$ dans ces formules, on obtient $\Delta^{2p} u_n$, $\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}$. On voit alors que :

1° Dans $\Delta^{2p} u_n$, les coefficients de a_n^{2p}, $a_n^{2p+2}, \ldots$ ont leurs termes

propres égaux deux à deux et de même signe, et les coefficients de a_n^{2p+1}, a_n^{2p+3},..., leurs termes égaux deux à deux et de signe contraire; ces derniers coefficients sont donc nuls.

2° Dans $\Delta^{2p+1} u_{n-\frac{1}{2}}$, les coefficients de a_n^{2p+1}, a_n^{2p+3},..., sont les mêmes que dans $\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}$; ceux de a_n^{2p+2}, a_n^{2p+4},..., égaux et de signe contraire; ils disparaîtront donc dans la moyenne arithmétique $\Delta^{\cdot 2p+1} u_n$.

Il résulte de là que si nous réunissons dans $\Delta^{2p} u_n$, $\Delta^{\cdot 2p+1} u_n$ les termes contenant en facteur la puissance d'un même nombre, nous aurons des expressions de la forme

$$(m)\quad \begin{cases} \Delta^{2p} u_n = a_n^{2p}\left[m_p^0 p^{2p} + m_p^1 (p-1)^{2p} + \ldots + m_p^{p-1} 1^{2p}\right] \\ \qquad + a_n^{2p+2}\left[m_p^0 p^{2p+2} + \ldots\right] + \ldots \text{(*)} \end{cases}$$

$$(\mu)\quad \begin{cases} \Delta^{\cdot 2p+1} u_n = a_n^{2p+1}\left[\mu_p^0 (p+1)^{2p+1} + \mu_p^1 p^{2p+1} + \ldots + \mu_p^p 1^{2p+1}\right] \\ \qquad + a_n^{2p+3}\left[\mu_p^0 (p+1)^{2p+3} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Il résulte aussi du n° **13**, que le coefficient de $a_n^{2p} = 1, 2, 3, \ldots, 2p$, et que celui de $a_n^{2p+1} = 1, 2, 3, \ldots, (2p+1)$ dans (m) et (μ).

15. Si au lieu de poser $t = t_n + z\alpha$, nous posons $t = t_{n+\frac{1}{2}} + z\alpha$, où $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{1}{2}\alpha$, nous aurons pour le développement de u, suivant les puissances croissantes de z,

$$(1)' \qquad u_{n+\frac{1}{2}+z} = u_{n+\frac{1}{2}} + a^1_{n+\frac{1}{2}} z + \ldots + a^k_{n+\frac{1}{2}} z^k + \ldots,$$

où $u_{n+\frac{1}{2}}$ est la valeur de u pour $t = t_{n+\frac{1}{2}}$, et où

$$a^k_{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{d^k u}{dt^k}\right)_{n+\frac{1}{2}} \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k},$$

conformément à la notation adoptée.

Cette série $(1)'$ donnant u_{n+h} pour $z = h - \frac{1}{2}$, on voit que les formules

(*) La forme (m) suppose $p > 0$.

établies aux nos 13 et 14 subsistent, si l'on y remplace dans les seconds membres h par $h - \frac{1}{2}$ et les coefficients a_n par les coefficients $a_{n+\frac{1}{2}}$.

Ainsi l'équation (7) nous donne, en faisant $h = 0$, après cette substitution dans le second membre,

$$\begin{aligned}\Delta^{2p} u_n = a^{2p}_{n+\frac{1}{2}} &\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^{2p} - \frac{2p}{1}\left(p - \frac{3}{2}\right)^{2p} + \ldots + \left(-p - \frac{1}{2}\right)^{2p}\right] \\ &+ a^{2p+1}_{n+\frac{1}{2}}\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^{2p+1} - \ldots\right] + \ldots;\end{aligned}$$

la même équation appliquée à u_{n+h+1} donne de la même manière

$$\begin{aligned}\Delta^{2p} u_{n+1} = a^{2p}_{n+\frac{1}{2}} &\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)^{2p} - \frac{2p}{1}\left(p - \frac{1}{2}\right)^{2p} + \ldots + \left(-p + \frac{1}{2}\right)^{2p}\right] \\ &+ a^{2p+1}_{n+\frac{1}{2}}\left[\left(p + \frac{1}{2}\right)^{2p+1} - \ldots\right] + \ldots,\end{aligned}$$

ce qui fournit, pour la moyenne arithmétique de ces deux différences, une expression de la forme

$$(\nu)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta'^{2p} u_{n+\frac{1}{2}} = a^{2p}_{n+\frac{1}{2}} &\left[\nu^0_p \left(p + \frac{1}{2}\right)^{2p} + \nu^1_p \left(p - \frac{1}{2}\right)^{2p} + \ldots + \nu^p_p \left(\frac{1}{2}\right)^{2p}\right] \\ &+ a^{2p+2}_{n+\frac{1}{2}}\left[\nu^0_p\left(p + \frac{1}{2}\right)^{2p+2} + \ldots\right] + \ldots \text{ (*)};\end{aligned}\right.$$

l'équation (9) donne de même pour $\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}$ une expression de cette forme

$$(\varepsilon)\quad \left\{\begin{aligned}\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} = a^{2p+1}_{n+\frac{1}{2}} &\left[\varepsilon^0_p \left(p + \frac{1}{2}\right)^{2p+1} + \varepsilon^1_p \left(p - \frac{1}{2}\right)^{2p+1} + \ldots + \varepsilon^p_p \left(\frac{1}{2}\right)^{2p+1}\right] \\ &+ a^{2p+3}_{n+\frac{1}{2}}\left[\varepsilon^0_p\left(p + \frac{1}{2}\right)^{2p+3} + \ldots\right] + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Il résulte encore du n° 13 que le coefficient de $a^{2p}_{n+\frac{1}{2}} = 1, 2, 3, \ldots, 2p$, et celui de $a^{2p+1}_{n+\frac{1}{2}} = 1, 2, 3, \ldots, (2p+1)$ dans (ν) et (ε).

(*) La forme (ν) est encore vraie pour $p = 0$, si l'on remplace dans le premier membre $\Delta'^{2p} u_{n+\frac{1}{2}}$ par $u'_{n+\frac{1}{2}}$, et dans le second $a^{2p}_{n+\frac{1}{2}}$ par $u_{n+\frac{1}{2}}$.

16. Les formules des n^os 13, 14, 15 conduisent aux valeurs des coefficients des équations (1) et (1)'. Pour déterminer a_n^1, $a_n^2, \ldots, a_n^k$, nous pouvons employer les relations que fournit, soit (l), soit le système (m), (μ). Pour déterminer $u_{n+\frac{1}{2}}$, $a^1_{n+\frac{1}{2}}$, $a^2_{n+\frac{1}{2}}, \ldots, a^k_{n+\frac{1}{2}}$, nous emploierons le système (ν), (ε). A chacun de ces trois systèmes de relations correspond pour u une forme particulière remarquable.

1° (l) donne, pour les valeurs 1, 2, 3, ..., p, attribuées à p,

$$\begin{aligned}
\Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} &= a_n^1 l_1^0 + a_n^2 l_1^0 + a_n^3 l_1^0 + \ldots + a_n^p l_1^0 + \ldots,\\
\Delta^2 u_{n+1} &= a_n^2[l_2^0 2^2 + l_2^1 1^2] + a_n^3[l_2^0 2^3 + l_2^1 1^3] + \ldots + a_n^p[l_2^0 2^p + l_2^1 1^p] + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} &= a_n^p\left[l_p^0 p^p + l_p^1 (p-1)^p + \ldots + l_p^{p-1} 1^p\right] + \ldots.
\end{aligned}$$

Les coefficients a_n^1, $a_n^2, \ldots$ sont des fonctions linéaires des différences de u_n; on aura donc

$$u_{n+z} = u_n + \lambda_1 \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \lambda_p \Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} + \ldots. \tag{10}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ étant des fonctions entières de z, qu'on déterminera en identifiant les coefficients de a_n^1, $a_n^2, \ldots$ dans les équations (1) et (10); on obtient ainsi immédiatement

$$(\lambda)\quad \left\{\begin{aligned}
z &= \lambda_1 l_1^0,\\
z^2 &= \lambda_1 l_1^0 + \lambda_2 (l_2^0 2^2 + l_2^1 1^2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z^k &= \lambda_1 l_1^0 + \lambda_2 (l_2^0 2^k + l_2^1 1^k) + \ldots + \lambda_k \left(l_k^0 k^k + \ldots + l_k^{k-1} 1^k\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z^p &= \lambda_1 l_1^0 + \lambda_2 (l_2^0 2^p + l_2^1 1^p) + \ldots + \lambda_k \left(l_k^0 k^p + \ldots + l_k^{k-1} 1^p\right) + \ldots + \lambda_p \left(l_p^0 p^p + \ldots + l_p^{p-1} 1^p\right).
\end{aligned}\right.$$

2° Le système (m), (μ), donne, exactement de la même manière,

$$u_{n+z} = u_n + \lambda'_1 \Delta^1 u_n + \ldots + \lambda'_{2p-1} \Delta^{2p-1} u_n + \lambda'_{2p} \Delta^{2p} u_n + \ldots, \tag{11}$$

avec

$$(\lambda')\quad \left\{\begin{aligned}
z^2 &= \lambda'_2 m_1^0, & z &= \lambda'_1 \mu_0^0,\\
z^4 &= \lambda'_2 m_1^0 + \lambda'_4 (m_2^0 2^4 + m_2^1 1^4), & z^3 &= \lambda'_1 \mu_0^0 + \lambda'_3 (\mu_1^0 2^3 + \mu_1^1 1^3),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right.$$

3° (ν), (ε) et l'équation (1)', donnent encore, exactement de la même manière,

$$(12)\quad u_{n+\frac{1}{2}+z} = \lambda''_0 u_{n+\frac{1}{2}} + \lambda''_1 \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \lambda''_{2p} \Delta^{2p} u_{n+\frac{1}{2}} + \lambda''_{2p+1} \Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \ (*),$$

avec

$$(\lambda'')\left\{\begin{array}{ll} z^0 = \lambda''_0 \nu^0_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0, & z = \lambda''_1 \varepsilon^0_0 \left(\frac{1}{2}\right)^1, \\ z^2 = \lambda''_0 \nu^0_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \lambda''_2\left[\nu^0_1 \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \nu^1_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2\right], & z^3 = \lambda''_1 \varepsilon^0_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \lambda''_3\left[\varepsilon^0_1 \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \varepsilon^1_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3\right]. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

17. La constitution des systèmes (λ), (λ'), (λ'') permet de les résoudre aussi facilement qu'on les a formés, c'est-à-dire sans calcul, et tous les trois de la même manière. Considérons le système (λ).

Les termes qui se correspondent verticalement dans les coefficients de λ_k sont de la forme

$$l^m_k (k-m)^k, \quad l^m_k (k-m)^{k+1}, \quad l^m_k (k-m)^{k+2}, \quad \ldots, \quad l^m_k (k-m)^{k+(p-k)}.$$

Si donc nous retranchons chaque équation λ, multipliée par 1, de la suivante, nous obtiendrons dans le système résultant $(\lambda)_1$

$$l^m_k (k-m)^k (k-m-1), \quad l^m_k (k-m)^{k+1} (k-m-1), \ldots, \quad l^m_k (k-m)^{p-1} (k-m-1).$$

Si nous retranchons chaque équation du système $(\lambda)_1$, multipliée par 2, de la suivante, nous aurons dans le système résultant $(\lambda)_2$

$$l^m_k (k-m)^k (k-m-1)(k-m-2), \ldots, \quad l^m_k (k-m)^{p-1} (k-m-1)(k-m-2).$$

Généralement, si ayant obtenu le système $(\lambda)_{p-2}$, on en multiplie chaque équation par $(p-1)$, pour la retrancher de la suivante, on obtiendra, dans le système $(\lambda)_{p-1}$,

$$l^m_k (k-m)^k (k-m-1)(k-m-2)\ldots(k-m-p+1), \ldots,$$

(*) *Voir* les notes, pages 184, 186, 187, dont il faut tenir compte pour former les équations (10), (11), (12) et les systèmes (λ), (λ'), (λ'').

de sorte que tous les termes des coefficients de λ, dans le système (λ), pour lesquels on a

$$k - m = 1,\quad 2,\ldots,\quad p-1,$$

c'est-à-dire les $(p-1)$ derniers termes de ces coefficients, n'existent plus dans le système $(\lambda)_{p-1}$. La première et unique équation de ce système final sera donc

$$z(z-1)(z-2)\ldots(z-p+1) = \lambda_p . 1.2.3\ldots p,$$

d'où

$$\lambda_p = \frac{z(z-1)(z-2)\ldots(z-p+1)}{1.2.3\ldots p}.$$

Le même genre de raisonnement, appliqué aux systèmes (λ') et (λ''), montre que l'on a

$$\lambda'_{2p} = \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots[z^2-(p-1)^2]}{1.2.3\ldots 2p},$$

$$\lambda'_{2p-1} = \frac{z(z^2-1^2)\ldots[z^2-(p-1)^2]}{1.2.3\ldots(2p-1)},$$

et

$$\lambda''_{2p} = \frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right]}{1.2.3\ldots 2p},$$

$$\lambda''_{2p+1} = \frac{z\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right]}{1.2.3\ldots(2p+1)}.$$

18. Si nous substituons ces valeurs dans les égalités (10), (11), (12), nous obtenons pour u les trois formes suivantes :

$$(\mathrm{I})\quad u_{n+z} = u_n + \frac{z}{1}\Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{z(z-1)\ldots(z-p+1)}{1.2\ldots p}\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}} + \ldots,$$

$$(\mathrm{J})\quad \left\{\begin{aligned} u_{n+z} = u_n &+ \frac{z}{1}\Delta'^1 u_n + \frac{z^2}{1.2}\Delta'^2 u_n + \ldots + \frac{z(z^2-1^2)\ldots[z^2-(p-1)^2]}{1.2\ldots(2p-1)}\Delta'^{2p-1} u_n \\ &+ \frac{z^2(z^2-1^2)\ldots[z^2-(p-1)^2]}{1.2\ldots 2p}\Delta'^{2p} u_n + \ldots,\end{aligned}\right.$$

$$
(\mathrm{K})\left\{
\begin{aligned}
u_{n+\frac{1}{2}+z} = {} & u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}} + \frac{z}{1}\Delta^{1} u_{n+\frac{1}{2}} + \frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}{1.2}\Delta^{\cdot 2} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \\
& + \frac{\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right]}{1.2.3\ldots 2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} \\
& + \frac{z\left[z^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2\right]}{1.2\ldots(2p+1)}\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

La première est la série si connue sous le nom de formule aux différences de Newton; les deux autres, quoique beaucoup moins répandues, ne sont pas moins remarquables; nous les emploierons même à l'exclusion de la première, et nous verrons bientôt pourquoi.

Soient s_k^p, S_k^p, ${}'S_k^p$ la somme des produits différents K à K, des p nombres des suites respectives : $-1, -2, -3, \ldots, -p$; $-1^2, -2^2, -3^2, \ldots, -p^2$; $-\left(\frac{1}{2}\right)^2, -\left(\frac{3}{2}\right)^2, -\left(\frac{5}{2}\right)^2, \ldots, -\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2$.

Supposons, en outre, les formules (I), (J), (K), ordonnées par rapport à z. On voit de suite, en identifiant les coefficients des mêmes puissances de z dans (I) ou (J) d'une part, et (1) d'autre part, que

$$a_n^k = \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{1.2.3\ldots p}\Delta^p u_{n+\frac{p}{2}}, \tag{13}$$

et

$$a_n^{2k} = \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{1.2.3\ldots 2p}\Delta^{2p} u_n\,(^*), \tag{14}$$

$$a_n^{2k+1} = \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{1.2.3\ldots(2p+1)}\Delta^{\cdot 2p+1} u_n. \tag{15}$$

On voit de même, par la comparaison des équations (K) et (1)′, que

$$a_{n+\frac{1}{2}}^{2k} = \sum \frac{{}'S_{p-k}^{p}}{1.2.3\ldots 2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}}\,(^{**}), \tag{16}$$

$$a_{n+\frac{1}{2}}^{2k+1} = \sum \frac{{}'S_{p-k}^{p}}{1.2\ldots(2p+1)}\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}, \tag{17}$$

(*) Les formules (13) et (14) supposent $k > 0$.

(**) La formule (16) est vraie pour $k = 0$ si l'on remplace $a_{n+\frac{1}{2}}^{2k}$ par $u_{n+\frac{1}{2}}$ dans le premier membre, et, dans le développement du second, $1.2.3\ldots 2p$ par 1; $\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}}$ par $u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}}$ pour $p = 0$.

les signes $\sum$ se rapportent dans ces formules aux valeurs entières de $p \geqq k$ et pour $p = k$, on fait s, S, 'S égales à 1.

19. Les coefficients a_n^k, $a_{n+\frac{1}{2}}^k$ étant ainsi déterminés, nous pouvons chercher les intégrales première et seconde de la fonction u; la méthode que nous donnons s'applique d'ailleurs, avec une égale facilité, à une intégrale d'ordre quelconque. Soit x une intégrale de u.

On a, en attribuant aux indices le même sens que précédemment,

$$(18) \qquad x_{n+z} = x_n + \left(\frac{dx}{dt}\right)_n \frac{\alpha}{1} z + \ldots + \left(\frac{d^k x}{dt^k}\right)_n \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots,$$

et

$$(19) \qquad x_{n+\frac{1}{2}+z} = x_{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{n+\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{1} z + \cdots + \left(\frac{d^k x}{dt^k}\right)_{n+\frac{1}{2}} \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} z^k + \ldots,$$

quel que soit l'ordre de l'intégrale x. Développons les deux cas dont nous aurons besoin :

1° $\dfrac{dx}{dt} = u$. On a alors

$$\left(\frac{d^{k+1} x}{dt^{k+1}}\right) \frac{\alpha^{k+1}}{1.2\ldots k(k+1)} = \left(\frac{d^k u}{dt^k}\right) \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} \frac{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha}{k+1} a^k,$$

d'où

$$(20) \qquad x_{n+z} = x_n + \alpha\left(u_n \frac{z}{1} + a_n^1 \frac{z^2}{2} + \ldots + a_n^k \frac{z^{k+1}}{k+1} + \ldots\right),$$

$$(21) \qquad x_{n+\frac{1}{2}+z} = x_{n+\frac{1}{2}} + \alpha\left(u_{n+\frac{1}{2}} \frac{z}{1} + a_{n+\frac{1}{2}}^1 \frac{z^2}{2} + \ldots + a_{n+\frac{1}{2}}^k \frac{z^{k+1}}{k+1} + \ldots\right).$$

2° $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = u$. Posons

$$y = \frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = u;$$

on a alors

$$\frac{d^{k+2} x}{dt^{k+2}} \frac{\alpha^{k+2}}{1.2\ldots(k+1)(k+2)} = \frac{d^k u}{dt^k} \frac{\alpha^k}{1.2\ldots k} \frac{\alpha^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{\alpha^2}{(k+1)(k+2)} a^k,$$

d'où

$$(22)\quad x_{n+1} = x_n + \alpha y_n z + \alpha^2\left[u_n \frac{z^2}{1.2} + a_n^1 \frac{z^3}{2.3} + \ldots + a_n^k \frac{z^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \ldots\right],$$

$$(23)\quad \begin{cases} x_{n+\frac{1}{2}+1} = x_{n+\frac{1}{2}} + \alpha y_{n+\frac{1}{2}} z \\ \qquad + \alpha^2\left[u_{n+\frac{1}{2}} \frac{z^2}{1.2} + a_{n+\frac{1}{2}}^1 \frac{z^3}{2.3} + \ldots + a_{n+\frac{1}{2}}^k \frac{z^{k+2}}{(k+1)(k+2)} + \ldots\right]. \end{cases}$$

Puisque a_n^k, $a_{n+\frac{1}{2}}^k$ sont actuellement connus, l'une et l'autre des deux formules (20), (21) dans le premier cas; (22), (23) dans le second, donnent la valeur de x pour toutes les valeurs de t correspondantes aux valeurs attribuées à z; mais leur emploi n'est pas avantageux dans la pratique, car, si l'on y prend un nombre fixe de termes, l'erreur commise croît très-rapidement avec z; de sorte que, pour obtenir x avec la même exactitude dans tout le cours du calcul, il faudrait prendre un nombre de termes croissant avec cette variable z. On évite cet inconvénient en ne faisant varier z qu'entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, et donnant à n toutes les valeurs entières, positives ou négatives; de sorte que $t = t_n + z\alpha$ prend toutes les valeurs possibles. Il suffit de connaître x_i ou $x_{i+\frac{1}{2}}$, i étant entier; nous allons déterminer ces quantités de proche en proche en donnant à z les seules valeurs $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$ et en supposant que la valeur initiale est $x_{-\frac{1}{2}}$ ou x_0. Nous examinerons les quatre combinaisons possibles entre ces valeurs extrêmes de x et, par un choix convenable des formules précédentes, nous ferons disparaître du résultat les valeurs des coefficients a_n^k de même parité relativement à k.

Quadrature de $\frac{dx}{dt} = u$.

20. La formule (20) donne, pour $z = -\frac{1}{2}$, $z = +\frac{1}{2}$,

$$x_{n-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad x_{n+\frac{1}{2}},$$

dont la différence est

$$x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}} = \alpha\left[u_n + a_n^2 \frac{1}{3.2^2} + \ldots + a_n^{2k} \frac{1}{(2k+1)2^{2k}} + \ldots\right].$$

La formule (21) donne de même, pour $z=-\frac{1}{2}$, $z=+\frac{1}{2}$,

$$x_n \quad \text{et} \quad x_{n+1},$$

dont la différence est

$$x_{n+1}-x_n=\alpha\left[u_{n+\frac{1}{2}}+a^2_{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{3.2^2}+\ldots+a^{2k}_{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}+\ldots\right];$$

d'où

$$x_{i+\frac{1}{2}}-x_{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{n=i}\left(x_{n+\frac{1}{2}}-x_{n-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{n=i}\left[u_n+\frac{1}{3.2^2}a^2_n+\ldots+\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}a^{2k}_n+\ldots\right],$$

$$x_i-x_0=\sum_{n=0}^{n=i-1}(x_{n+1}-x_n)$$

$$=\alpha\sum_{n=0}^{n=i-1}\left[u_{n+\frac{1}{2}}+\frac{1}{3.2^2}a^2_{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}a^{2k}_{n+\frac{1}{2}}+\ldots\right].$$

Calcul de $x_{i+\frac{1}{2}}-x_{-\frac{1}{2}}$.

u_n est une quantité calculée et connue; a^{2k}_n peut être fourni soit par la formule (13), soit par la formule (14) du n° **18**. La formule (13) introduirait tous les ordres de différences; la formule (14), n'introduisant que les différences de même parité, doit être préférée, dans l'application; elle donne

$$\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}a^{2k}_n=\sum\frac{S^{p-1}_{p-k}}{1.2\ldots 2p}\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}\Delta^{2p}u_n,$$

où p doit prendre toutes les valeurs entières k, $k+1$,... et où $k>0$....

Le coefficient, dans $x_{i+\frac{1}{2}}-x_{-\frac{1}{2}}$, d'une différence déterminée $\Delta^{2p}u_n$ s'obtiendra donc en laissant p fixe sous le signe $\sum$ et faisant varier k de 1 à p dans l'expression

$$\sum\frac{S^{p-1}_{p-k}}{1.2\ldots 2p}\frac{1}{(2k+1)2^{2k}}.$$

Soit A_{2p} ce coefficient, on aura

$$(24)\qquad A_{2p} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\left[\frac{S_{p-1}^{p-1}}{3.2^2} + \frac{S_{p-2}^{p-1}}{5.2^4} + \ldots + \frac{S_0^{p-1}}{(2p+1)2^{2p}}\right](^*),$$

et, par suite,

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha \sum_{n=0}^{n=i} (A_0 u_n + A_2 \Delta^2 u_n + \ldots + A_{2p} \Delta^{2p} u_n + \ldots);$$

mais, en se reportant à la formation du tableau des différences, on voit que

$$\sum_{n=0}^{n=i} \Delta^{2p} u_n = \Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}}.$$

Si nous désignons par $'u_{-\frac{1}{2}}$, $'u_{\frac{1}{2}}$, $'u_{\frac{3}{2}}, \ldots, 'u_{i+\frac{1}{2}}$ une suite de nombres dont le premier est arbitraire, admettant $u_0, u_1, \ldots, u_i$ pour différences premières, nous aurons

$$\sum_0^i u_n = {}'u_{i+\frac{1}{2}} - {}'u_{-\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$(\mathrm{L})\quad x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(A_0\,{}'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2 \Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p} \Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + C_{-\frac{1}{2}}$$

avec

$$C_{-\frac{1}{2}} = -\alpha\left(A_0\,{}'u_{-\frac{1}{2}} + A_2 \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p} \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right).$$

On pourra faire disparaître la constante $C_{-\frac{1}{2}}$, en déterminant l'arbitraire $'u_{-\frac{1}{2}}$ par la condition

$$C_{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Calcul de $x_i - x_0$.

La formule (16), n° 18, donne $u_{n+\frac{1}{2}}$, $a^2_{n+\frac{1}{2}}, \ldots$, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. On a généralement

$$\frac{1}{(2k+1)2^{2k}} a^{2k}_{n+\frac{1}{2}} = \sum \frac{'S_{p-k}^{p}}{1.2.3\ldots 2p} \frac{1}{(2k+1)2^{2k}} \Delta^{2p} u_{n+\frac{1}{2}}.$$

(*) La formule (24) ne s'applique plus pour $p = 0$. On voit directement que, dans ce cas, $\Delta^{2p} u_n = u_n$, $A_{2p} = 1$.

On voit par là que le coefficient de $\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}}$, dans $x_i - x_0$, étant désigné par A'_{2p}, on a

$$(25)\qquad A'_{2p} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\left[\frac{'S_p^p}{1.2^0} + \frac{'S_{p-1}^p}{3.2^2} + \ldots + \frac{'S_0^p}{(2p+1)2^{2p}}\right] (*).$$

et, par suite,

$$x_i - x_0 = \alpha \sum_{n=0}^{n=i-1} \left(A'_0\, 'u^{\cdot}_{n+\frac{1}{2}} + A'_2\, \Delta^{\cdot 2} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + A'_{2p}\, \Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots\right).$$

Mais, par définition,

$$\Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_n + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_{n+1},$$

donc

$$\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{2p} u_n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{2p} u_{n+1};$$

or,

$$\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{2p} u_n = \Delta^{2p-1} u_{i-\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{2p} u_{n+1} = \Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{+\frac{1}{2}},$$

donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{n=i-1} \Delta^{\cdot 2p} u_{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{i-\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \Delta^{\cdot 2p-1} u_i - \Delta^{\cdot 2p-1} u_0,\end{aligned}$$

ce qui nous conduit à la formule

$$(\mathrm{M})\qquad x_i - x_0 = \alpha\left(A'_0\, 'u^{\cdot}_i + A'_2\, \Delta^{\cdot 1} u_i + \ldots + A'_{2p}\, \Delta^{\cdot 2p-1} u_i + \ldots\right) + C_0,$$

avec

$$C_0 = -\alpha\left(A'_0\, 'u^{\cdot}_0 + A'_2\, \Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A'_{2p}\, \Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots\right):$$

on pourra déterminer la quantité arbitraire $'u_{-\frac{1}{2}}$ par la condition $C_0 = 0$.

(*) La formule (25) s'applique pour $p = 0$, conformément aux conventions de la note (**), page 191. $A'_0 = 1$.

La formule (L) permettra de calculer $x_{i+\frac{1}{2}}$, si l'on se donne $x_{-\frac{1}{2}}$; et la formule (M), de calculer x_i, si l'on se donne x_0.

21. Il est quelquefois utile de pouvoir calculer $x_{i+\frac{1}{2}}$, connaissant x_0; et x_i, connaissant $x_{-\frac{1}{2}}$. Formons donc $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$ et $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$, dont nous aurons d'ailleurs besoin pour la deuxième intégration. Nous les déduirons de $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}}$ et $x_i - x_0$ en retranchant de la première quantité et en ajoutant à la seconde $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$, que nous allons calculer d'abord.

La formule (20) donne pour $n = 0$ et pour $z = -\frac{1}{2}$

$$x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left[u_0 \frac{1}{1.2^1} + a_0^2 \frac{1}{3.2^3} + \ldots + a_0^{2k} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} + \ldots\right]$$
$$- \alpha\left[a_0^1 \frac{1}{2.2^2} + a_0^3 \frac{1}{4.2^4} + \ldots + a_0^{2k+1} \frac{1}{(2k+2)2^{2k+2}} + \ldots\right].$$

Or les relations (14) et (15), pour $n = 0$, sont

$$a_0^{2k} = \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{1.2.3\ldots 2p} \Delta^{2p} u_0,$$
$$a_0^{2k+1} = \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{1.2.3\ldots(2p+1)} \Delta^{2p+1} u_0.$$

Les coefficients de $\Delta^{2p} u_0$, $\Delta^{2p+1} u_0$ dans $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$ seront donc respectivement

$$\frac{1}{1.2\ldots 2p} \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{(2k+1)2^{2k+1}} = \frac{1}{2} A_{2p},$$

et

$$\frac{1}{1.2\ldots(2p+1)} \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{(2k+2)2^{2k+2}}.$$

Appelons ce dernier A_{2p+1},

$$(26) \qquad A_{2p+1} = \frac{1}{1.2\ldots(2p+1)}\left[\frac{S_p^p}{2.2^2} + \frac{S_{p-1}^p}{4.2^4} + \ldots + \frac{S_0^p}{(2p+2)2^{2p+2}}\right],$$

donc

$$[0]\quad \left\{ \begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} &= \frac{\alpha}{2}(A_0 u_0 + A_2 \Delta^2 u_0 + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p} u_0 + \ldots) \\ &\quad - \alpha(A_1 \Delta^{\cdot 1} u_0 + A_3 \Delta^{\cdot 3} u_0 + \ldots + A_{2p+1}\Delta^{\cdot 2p+1} u_0 + \ldots). \end{aligned} \right.$$

On peut trouver une forme différente pour $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$, en partant de l'équation (21), qui, pour $n = -1$ et $z = +\frac{1}{2}$, donne

$$\begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} &= \alpha\left[u_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{1.2^1} + a^2_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3.2^3} + \ldots + a^{2k}_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}} + \ldots\right] \\ &\quad + \alpha\left[a^1_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2.2^2} + a^3_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{4.2^4} + \ldots + a^{2k+1}_{-\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+2)2^{2k+2}} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

Or les relations (16) et (17), pour $n = -1$, sont

$$a^{2k}_{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{'S^p_{p-k}}{1.2\;3\ldots 2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}},$$

$$a^{2k+1}_{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{'S^p_{p-k}}{1.2.3\;\ldots(2p+1)}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}.$$

Les coefficients de $\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$ dans $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$ seront donc respectivement

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\sum \frac{'S^p_{p-k}}{(2k+1)2^{2k+1}} = \frac{1}{2}A'_{2p},$$

et

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)}\sum \frac{'S^p_{p-k}}{(2k+2)\,2^{2k+2}}.$$

Appelons ce dernier A'_{2p+1},

$$(27)\quad A'_{2p+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)}\left[\frac{'S^p_p}{2.2^2} + \frac{'S^p_{p-1}}{4.2^4} + \ldots + \frac{'S^p_0}{(2p+2)2^{2p+2}}\right],$$

d'où

$$\left[-\frac{1}{2}\right]\quad \left\{ \begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} &= \frac{\alpha}{2}\left(A'_0 u_{-\frac{1}{2}} + A'_2 \Delta^{\cdot 2} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A'_{2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) \\ &\quad + \alpha\left(A'_1 \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + A'_3 \Delta^3 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A'_{2p+1}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right). \end{aligned} \right.$$

22. Les deux expressions $\left[-\frac{1}{2}\right]$ et $[0]$, de $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$, nous ont conduit à des relations importantes entre les coefficients A_{2p}, A_{2p+1},

A'_{2p}, A'_{2p+1}. Ces expressions contiennent en effet, respectivement, les divers termes des deux lignes horizontales complètes $\left(-\frac{1}{2}\right)$ et (0), savoir :

$$\begin{array}{llll} u_{-\frac{1}{2}}, & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}}, \ldots, & \Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}}, & \Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}, \\ u_0, & \Delta^1 u_0, \ldots, & \Delta^{2p} u_0, & \Delta^{2p+1} u_0. \end{array}$$

Or, si l'on fait $n = 0$ dans les formules (2) et (3) du n° **12**, on voit que si l'on exprime les termes de la seconde ligne en fonction de ceux de la première pour les substituer dans [O], $\Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}}$ ne sera introduit dans le résultat que par

$$\Delta^{2p} u_0 = \Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}},$$

et

$$\Delta^{2p-1} u_0 = \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}},$$

de sorte qu'en identifiant, après substitution, les coefficients de $\Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}}$ dans [O] et $\left[-\frac{1}{2}\right]$, on aura

$$A_{2p} - A_{2p-1} = A'_{2p}.$$

On verra de même, en identifiant les coefficients de $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$, qui sera introduit par $\Delta^{2p+1} u_0$, $\Delta^{2p} u_0$, $\Delta^{2p-1} u_0$ dans [O], que

$$\frac{1}{4}(A_{2p} - A_{2p-1}) = A_{2p+1} + A'_{2p+1}.$$

Si, inversement, au moyen des relations (4), (5), n° **12**, on exprime les termes de la première ligne en fonction de ceux de la seconde pour les substituer dans $\left[-\frac{1}{2}\right]$, afin de comparer ce résultat à [O], on retrouve les mêmes relations

$$(\rho)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_{2p} - A_{2p-1} = A'_{2p}, \\ &A_{2p+1} + A'_{2p+1} = \frac{1}{4}A'_{2p}. \end{aligned}\right.$$

23. Ces relations nous seront très-utiles pour obtenir commodément $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$, et $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$.

Calcul de $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$.

Si à la relation

$$x_i - x_0 = \alpha\left(A'_0\,{}'u_i^{\cdot} + A'_2\,\Delta^{\cdot 1} u_i + \ldots + A'_{2p}\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_i + \ldots\right) + C_0,$$

où

$$C_0 = -\alpha\left(A'_0\,{}'u_0^{\cdot} + A'_2\,\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A'_{2p}\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots\right),$$

nous ajoutons membre à membre la relation [O], n° **21**, nous aurons

$$x_i - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(A'_0\,{}'u_i^{\cdot} + A'_2\,\Delta^{\cdot 1} u_i + \ldots + A'_{2p}\,\Delta^{\cdot 2p-1} u_i + \ldots\right) + \text{const.},$$

avec

$$\text{const.} = -\alpha\left(\begin{array}{r|r|r|l} A'_0\,{}'u_0^{\cdot} + A'_2 & \Delta^{\cdot 1} u_0 + A'_4 & \Delta^{\cdot 3} u_0 + \ldots + A'_{2p} & \Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots \\ + A_1 & + A_3 & + A_{2p-1} & \end{array}\right)$$
$$+ \frac{\alpha}{2}\left(A_0 u_0 + A_2\,\Delta^2 u_0 + A_4\,\Delta^4 u_0 + \ldots + A_{2p}\,\Delta^{2p} u_0 + \ldots\right),$$

ou, en vertu de l'identité précédemment démontrée,

$$A'_{2p} + A_{2p-1} = A_{2p},$$

et de ce que $A_0 = A'_0 = 1$,

$$\text{const.} = -\alpha\Big[A_0\left({}'u_0^{\cdot} - \frac{1}{2} u_0\right) + A_2\left(\Delta^{\cdot 1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 u_0\right) + \ldots$$
$$+ A_{2p}\left(\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0\right)\cdots\Big]:$$

mais comme

$$\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 = \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}}\right),$$
$$\frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 = \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}}\right),$$

on a

$$\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 = \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}};$$

par suite

$$\text{const.} = -\alpha\left(A_0\,{}'u_{-\frac{1}{2}} + A_2\,\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\,\Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) = C_{-\frac{1}{2}}.$$

Calcul de $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$.

Si de

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(A_0\,{}'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2\,\Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\,\Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + C_{-\frac{1}{2}},$$

nous retranchons [O] membre à membre, nous aurons

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_0 = \alpha\left(A_0\,'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2\Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + \text{const.},$$

avec

$$\begin{array}{rl} \text{const.} = -\alpha & \left(\begin{array}{r|r|r|l} 'u_{-\frac{1}{2}} & A_0 + \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} & A_2 + \ldots + \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} & A_{2p} \quad + \ldots \\ + \frac{1}{2} u_0 & + \frac{1}{2}\Delta^2 u_0 & + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 & \end{array}\right) \\ + \alpha & (\qquad\qquad + \Delta^{\cdot 1} u_0 \qquad A_1 + \ldots + \Delta^{\cdot 2p-1} u_0 \qquad A_{2p-1} + \ldots); \end{array}$$

mais comme

$$\Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p} u_0 = \frac{1}{2}\left(\Delta^{2p-1} u_{\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1} u_{-\frac{1}{2}}\right) = \Delta^{\cdot 2p-1} u_0,$$

on a, en vertu de l'identité ci-dessus rappelée,

$$\text{const.} = -\alpha\left(A'_0\,'u'_0 + A'_2\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A'_{2p}\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots\right) = C_0.$$

On a ainsi les formules suivantes :

$$(\mathrm{L}_1) \quad x_{i+\frac{1}{2}} - x_0 = \alpha\left(A_0\,'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2\Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p-1} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + C_0,$$

$$(\mathrm{M}_1) \quad x_i - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha(A'_0\,'u'_i + A'_2\Delta^{\cdot 1} u_i + \ldots + A'_{2p}\Delta^{\cdot 2p-1} u_i + \ldots) + C_{-\frac{1}{2}}.$$

Remarque. — Avant de passer à la quadrature seconde, nous démontrerons l'identité

$$x_0 + C_0 = x_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}},$$

qui nous servira pour cette quadrature.

On a vu, nos **20** et **21**, que

$$C_0 = \qquad\qquad -\alpha(A'_0\,'u'_0 + A'_2\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A'_{2p}\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots),$$

$$x_0 = x_{-\frac{1}{2}} + \frac{\alpha}{2}(A_0 u_0 + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p} u_0 + \ldots) - \alpha(A_1\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + A_{2p-1}\Delta^{\cdot 2p-1} u_0 + \ldots).$$

En vertu de la première relation (ρ),

$$A_{2p-1} + A'_{2p} = A_{2p};$$

donc

$$x_0 + C_0 = x_{-\frac{1}{2}} - \alpha\left[A_0\left('u_0 - \frac{1}{2}u_0\right) + A_2\left(\Delta^{\cdot 1}u_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 u_0\right) + \ldots \right.$$
$$\left. + A_{2p}\left(\Delta^{\cdot 2p-1}u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p}u_0\right) + \ldots\right].$$

Mais on a

$$\Delta^{\cdot 2p-1}u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p}u_0 = \Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}};$$

on trouve ainsi

$$x_0 + C_0 = x_{-\frac{1}{2}} - \alpha\left(A_0 'u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) = x_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}.$$

Quadrature $\frac{d^2x}{dt^2} = u.$

24. Nous suivrons de point en point la méthode employée pour intégrer $\frac{dx}{dt} = u$.

Si dans les formules (22) et (23) on fait successivement $z = +\frac{1}{2}$, $z = -\frac{1}{2}$, et qu'on retranche le deuxième résultat du premier, on a

$$x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}} = \alpha y_n + \alpha^2\left[a_n^1 \frac{1}{2.3.2^2} + \ldots + a_n^{2k+1}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} + \ldots\right],$$
$$x_{n+1} - x_n = \alpha y_{n+\frac{1}{2}} + \alpha^2\left[a^1_{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{2.3.2^2} + \ldots + a^{2k+1}_{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} + \ldots\right];$$

d'où

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=i}\left(x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \alpha\sum_0^i y_n + \alpha^2\sum_{n=0}^{n=i}\left[a_n^1\frac{1}{2.3.2^2} + \ldots + a_n^{2k+1}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} + \ldots\right],$$

$$x_i - x_0 = \sum_{n=0}^{n=i-1}(x_{n+1} - x_n)$$
$$= \alpha\sum_0^{i-1} y_{n+\frac{1}{2}} + \alpha_2\sum_{n=0}^{n=i-1}\left[a^1_{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{2.3.2^2} + \ldots + a^{2k+1}_{n+\frac{1}{2}}\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} + \ldots\right].$$

Calcul de $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}}$.

Les coefficients a_n^{2k+1} peuvent être donnés soit par la relation (13), soit par la relation (15), n° **18**. La première est écartée comme introduisant les différences de tous les ordres; la seconde donne

$$\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+1}}a_n^{2k+1} = \sum \frac{S_{p-k}^p}{1.2.3(2p+1)} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}} \Delta^{\cdot 2p+1}u_n.$$

On voit, comme précédemment, que le coefficient de $\Delta^{\cdot 2p+1}u_n$, dans $x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}}$, étant désigné par B_{2p+1}, on a

$$B_{2p+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)}\left[\frac{S_p^p}{2.3.2^2} + \frac{S_{p-1}^p}{4.5.2^4} + \ldots + \frac{S_0^p}{(2p+2)(2p+3)2^{2p+2}}\right],$$

d'où

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\sum_0^i y_n + \alpha^2\sum_{n=0}^{n=i}(B_1\Delta^{\cdot 1}u_n + \ldots + B_{2p+1}\Delta^{\cdot 2p+1}u_n + \ldots).$$

Mais (M_1) donne (n° **23**)

$$y_n = y_{-\frac{1}{2}} + \alpha(A_0'\,'u_n^{\cdot} + A_2'\Delta^{\cdot 1}u^n + \ldots + A_{2p+2}'\Delta^{\cdot 2p+1}u_n + \ldots) + C_{-\frac{1}{2}};$$

donc

$$\begin{aligned}x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} &= \alpha(i+1)(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}})\\ &+ \alpha^2\sum_{n=0}^{n=i}[A_0'\,'u_n^{\cdot} + (A_2' + B_1)\Delta^{\cdot 1}u_n + \ldots + (A_{2p+2}' + B_{2p+1})\Delta^{\cdot 2p+1}u_n + \ldots],\end{aligned}$$

ou, comme

$$\sum_{n=0}^{n=i}\Delta^{\cdot 2p+1}u_n = \Delta^{\cdot 2p}u_{i+\frac{1}{2}} - \Delta^{\cdot 2p}u_{-\frac{1}{2}},$$

$$(\mathrm{P})\left\{\begin{aligned}&x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}}\\ &\quad= \alpha(i+1)(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}) + \alpha^2\Big[A_0'\,''u_{i+\frac{1}{2}}^{\cdot} + (A_2' + B_1)u_{i+\frac{1}{2}}^{\cdot} + \ldots\\ &\qquad + (A_{2p+2}' + B_{2p+1})\Delta^{\cdot 2p}u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\Big] + C_{-\frac{1}{2}}',\end{aligned}\right.$$

avec

$$C_{-\frac{1}{2}}' = -\alpha^2\Big[A_0'\,''u_{-\frac{1}{2}}^{\cdot} + (A_2' + B_1)u_{-\frac{1}{2}}^{\cdot} + \ldots + (A_{2p+2}' + B_{2p+1})\Delta^{\cdot 2p}u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\Big],$$

en appelant $''u_{-\frac{1}{2}}, ''u_{\frac{1}{2}}, \ldots, ''u_{i+\frac{1}{2}}$ les moyennes arithmétiques de deux nombres voisins dans la suite $''u_{-1}, ''u_0, \ldots, ''u_{i+1}$, dont le premier terme est arbitraire et dont les différences premières sont $'u_{-\frac{1}{2}}, 'u_{\frac{1}{2}}, \ldots, 'u_{i+\frac{1}{2}}$, quantités que nous avons définies précédemment. On pourra déterminer simultanément les arbitraires $'u_{-\frac{1}{2}}, ''u_{-1}$, par la condition que l'on ait

$$C_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad C'_{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Calcul de $x_i - x_0$.

La formule (17) donne $a^{2k+1}_{n+\frac{1}{2}}$, et on voit immédiatement que le coefficient de $\Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}}$ dans $x_i - x_0$ étant désigné par B'_{2p+1}, on a

$$B'_{2p+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)} \sum \frac{'S^p_{p-k}}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+2}}, \quad \text{où} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

c'est-à-dire

$$B'_{2p+1} = \frac{1}{1.2.3\ldots(2p+1)} \left[\frac{'S^p_p}{2.3.2^2} + \frac{'S^p_{p-1}}{4.5.2^4} + \ldots + \frac{'S^p_0}{(2p+2)(2p+3)2^{2p+2}} \right];$$

donc

$$x_i - x_0 = \alpha \sum_0^{i-1} y_{n+\frac{1}{2}} + \alpha^2 \sum_{n=0}^{n=i-1} \left(B'_1 \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p+1} \Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \right).$$

Mais (L_1) donne

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_0 + \alpha \left(A_0 'u_{n+\frac{1}{2}} + A_2 \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p+2} \Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \right) + C_0,$$

d'où

$$\begin{aligned} x_i - x_0 = \alpha i (y_0 + C_0) + \alpha^2 \sum_{n=0}^{n=i-1} \Big[& A_0 'u_{n+\frac{1}{2}} + (A_2 + B'_1) \Delta^1 u_{n+\frac{1}{2}} + \ldots \\ & + (A_{2p+2} + B'_{2p+1}) \Delta^{2p+1} u_{n+\frac{1}{2}} \ldots \Big], \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\text{(Q)} \quad \begin{aligned} x_i - x_0 = \alpha i (y_0 + C_0) + \alpha^2 [& A_0 ''u_i + (A_2 + B'_1) u_i + \ldots \\ & + (A_{2p+2} + B'_{2p+1}) \Delta^{2p} u_i + \ldots] + C'_0, \end{aligned}$$

avec

$$C'_0 = -\alpha^2 [A_0 ''u_0 + (A_2 + B'_1) u_0 + \ldots + (A_{2p+2} + B'_{2p+1}) \Delta^{2p} u_0 + \ldots].$$

Les arbitraires $'u_{-\frac{1}{2}}$ et $''u_{-1}$ peuvent être déterminées de telle sorte que l'on ait simultanément

$$C_0 = 0, \quad C'_0 = 0.$$

25. Il nous reste, pour achever cette section, à calculer $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$ et $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$. Nous suivrons encore la même marche que dans la première intégration, et nous formerons d'abord $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$.

1° Pour $n = 0$ et $z = -\frac{1}{2}$, l'équation (22) donne

$$x_{-\frac{1}{2}} - x_0 = -\frac{1}{2}\alpha y_0 + \alpha^2\left[u_0 \frac{1}{1.2.2^2} + \ldots + a_0^{2k} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)2^{2k+2}} + \ldots\right]$$
$$- \alpha^2\left[a_0^1 \frac{1}{2.3.2^3} + \ldots + a_0^{2k+1} \frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+3}} + \ldots\right];$$

comme

$$a_0^{2k} = \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{1.2\ldots 2p} \Delta^{2p} u_0,$$
$$a_0^{2k+1} = \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{1.2\ldots(2p+1)} \Delta^{\cdot 2p+1} u_0,$$

les coefficients de $\Delta^{2p} u_0$ et $\Delta^{\cdot 2p+1} u_0$ seront respectivement : le premier $\frac{1}{1.2\ldots 2p} \sum \frac{S_{p-k}^{p-1}}{(2k+1)(2k+2)2^{2k+2}}$, soit B_{2p} :

$$B_{2p} = \frac{1}{1.2\ldots 2p}\left[\frac{S_{p-1}^{p-1}}{3.4.2^4} + \ldots + \frac{S_0^{p-1}}{(2p+1)(2p+2)2^{2p+2}}\right] (*),$$

et le second

$$\frac{1}{1.2\ldots(2p+1)} \sum \frac{S_{p-k}^{p}}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+3}} = \frac{B_{2p+1}}{2};$$

donc

$$[O'] \quad \begin{cases} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha y_0 - \alpha^2(B_0 u_0 + \ldots + B_{2p}\Delta^{2p} u_0 + \ldots) \\ \qquad + \frac{\alpha^2}{2}(B_1 \Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + B_{2p+1}\Delta^{\cdot 2p+1} u_0 + \ldots). \end{cases}$$

(*) Cette formule ne s'applique plus pour $p = 0$. On voit directement que $\Delta^{2p} u_0$, B_{2p} sont alors u_0 et $\frac{1}{8}$.

2° Pour $n = -1$ et $z = +\frac{1}{2}$, l'équation (23) donne

$$\begin{aligned}
x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha y_{-\frac{1}{2}} &+ \alpha^2\Big[u_{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{1.2.2^2} + a^2_{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{3.4.2^4} + \ldots \\
&\qquad + a^{2k}_{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{(2k+1)(2k+2)2^{2k+2}} + \ldots\Big] \\
&+ \alpha^2\Big[a^1_{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{2.3.2^3} + a^3_{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{4.5.2^5} + \ldots \\
&\qquad + a^{2k+1}_{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+3}} + \ldots\Big];
\end{aligned}$$

mais

$$a^{2k}_{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{{}'S^p_{p-k}}{1.2.3.\;.2p}\,\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}},$$

$$a^{2k+1}_{-\frac{1}{2}} = \sum \frac{{}'S^p_{p-k}}{1.2\ldots(2p+1)}\,\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}};$$

les coefficients de $\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$ seront donc respectivement : le premier $\frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\sum \frac{{}'S^p_{p-k}}{(2k+1)(2k+2)2^{2k+2}}$, soit B'_{2p} :

$$B'_{2p} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2p}\left[\frac{{}'S^p_p}{1.2.2^2} + \ldots + \frac{{}'S^p_0}{(2p+1)(2p+2)2^{2p+2}}\right](*),$$

et le second

$$\frac{1}{1.2.3..\,(2p+1)}\sum \frac{{}'S^p_{p-k}}{(2k+2)(2k+3)2^{2k+3}} = \frac{1}{2}B'_{2p+1};$$

d'où

$$\left[-\frac{1'}{2}\right]\left\{\begin{aligned}
x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha y_{-\frac{1}{2}} &+ \alpha^2\left(B'_0\, u^{\cdot}_{-\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p}\,\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right) \\
&+ \frac{\alpha^2}{2}\left(B'_1\,\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p+1}\,\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right).
\end{aligned}\right.$$

26. Nous obtenons ainsi une deuxième forme de $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$, où figurent $y_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$, tandis que dans la première figurent y_0, $\Delta^{2p} u_0$, $\Delta^{\cdot 2p+1} u_0$; si nous identifions les deux formes après avoir

(*) Cette formule a lieu pour $p = 0$, conformément aux conventions de la note (**), page 197. $B'_0 = \frac{1}{8}$.

remplacé ces dernières quantités par les premières, ou inversement, nous découvrirons des relations utiles entre les coefficients A et B :

1° On a, par la relation [O] n° **21**,

$$\begin{aligned} y_0 = y_{-\frac{1}{2}} &+ \frac{\alpha}{2}(A_0 u_0 + A_2 \Delta^2 u_0 + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p} u_0 + \ldots) \\ &- \alpha(A_1 \Delta^{\cdot 1} u_0 + A_3 \Delta^{\cdot 3} u_0 + \ldots + A_{2p+1}\Delta^{\cdot 2p+1} u_0 + \ldots). \end{aligned}$$

Substituant cette valeur dans [O′], on obtient

$$[O''] \left\{ \begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}\alpha y_{-\frac{1}{2}} \\ &- \frac{1}{2}\alpha^2 [(A_1 - B_1)\Delta^{\cdot 1} u_0 + \ldots + (A_{2p+1} - B_{2p+1})\Delta^{\cdot 2p+1} u_0 + \ldots] \\ &+ \frac{1}{4}\alpha^2 [(A_0 - 4B_0) u_0 + \ldots + (A_{2p} - 4B_{2p})\Delta^{2p} u_0 + \ldots]. \end{aligned} \right.$$

On voit alors que $\Delta^{\cdot 2p+1} u_0$, $\Delta^{2p} u_0, \ldots$ étant exprimés en fonction des différences qui figurent dans $\left[-\frac{1'}{2}\right]$, il ne resterait plus qu'à identifier les coefficients de $\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}}$, $\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}$ dans ces deux relations [O″] et $\left[-\frac{1'}{2}\right]$. On reconnaît immédiatement, en se reportant aux équations [O], $\left[-\frac{1}{2}\right]$ et les comparant à [O″], $\left[-\frac{1'}{2}\right]$, que le résultat ainsi obtenu ne sera autre chose que le système (ρ) où l'on aurait remplacé

$$A_{2p}, \quad \frac{1}{2}A'_{2p}, \quad A_{2p+1}, \quad A'_{2p+1},$$

par

$$\frac{1}{2}(A_{2p} - 4B_{2p}), \quad B'_{2p}, \quad \frac{1}{2}(A_{2p+1} - B_{2p+1}), \quad \frac{1}{2}B'_{2p+1}.$$

On aura, par ce changement, en mettant les coefficients A dans le premier membre,

$$(\rho') \quad \left\{ \begin{aligned} A_{2p-1} - A_{2p} &= B_{2p-1} - 4(B_{2p} + B'_{2p}), \\ A_{2p+1} &= B_{2p+1} - B'_{2p+1} + B'_{2p}. \end{aligned} \right.$$

2° On a, par la relation $\left[-\frac{1}{2}\right]$, la valeur de $y_{-\frac{1}{2}}$, qui, substituée

dans $\left[-\frac{1'}{2}\right]$, donne

$$\left[-\frac{1''}{2}\right]\left\{\begin{aligned} x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha y_0 & \\ & -\frac{1}{2}\alpha^2\Big[(A'_1 - B'_1)\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+1} - B'_{2p+1})\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\Big] \\ & -\frac{1}{4}\alpha^2\Big[(A'_0 - 4B'_0)u'_{-\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p} - 4B'_{2p})\Delta^{2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\Big]. \end{aligned}\right.$$

On voit encore, en comparant les équations [O′] et $\left[-\frac{1''}{2}\right]$ aux équations [O] et $\left[-\frac{1}{2}\right]$, que les relations ($\rho$) subsistent, si l'on y remplace

$$\frac{1}{2}A_{2p},\quad -A_{2p+1},\quad A'_{2p},\quad A'_{2p+1},$$

par

$$-B_{2p},\quad +\frac{1}{2}B_{2p+1},\quad -\frac{1}{2}(A'_{2p} - 4B'_{2p}),\quad -\frac{1}{2}(A'_{2p+1} - B'_{2p+1}),$$

ce qui donne, en plaçant les A dans le premier membre,

$$(\rho'')\qquad \left\{\begin{aligned} A'_{2p} &= -B_{2p-1} + 4(B_{2p} + B'_{2p}), \\ A'_{2p+1} &= B_{2p} + B'_{2p+1} - B_{2p+1} - \frac{1}{4}B_{2p-1}. \end{aligned}\right.$$

Il est d'ailleurs évident que l'un quelconque des systèmes (ρ), (ρ'), (ρ'') résulte des deux autres.

27. Les relations que nous avons établies entre les coefficients constants A, B, nous seront très-utiles pour obtenir $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$ et $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$. Cherchons successivement ces deux quantités.

Calcul de $x_{i+\frac{1}{2}} - x_0$.

Nous avons les deux relations (P) et $\left[-\frac{1'}{2}\right]$ des nos **24** et **25**, savoir :

$$\begin{aligned} & x_{i+\frac{1}{2}} - x_{-\frac{1}{2}} \\ & \quad = \alpha(i+1)(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}) + \alpha^2\Big[A'_0{}'' u'_{i+\frac{1}{2}} + (A'_2 + B_1)u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots \\ & \qquad\qquad + (A'_{2p+2} - B_{2p+1})\Delta^{2p} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\Big] + C'_{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$x_0 - x_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\alpha\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) + \alpha^2\left(B'_0 u'_{-\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p}\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2}\left(B'_1 \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + B'_{2p+1}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right)$$
$$- \frac{1}{2}\alpha C_{-\frac{1}{2}}.$$

Si nous retranchons membre à membre la seconde de la première, il vient, en tenant compte de l'identité $\left(x_0 + C_0 = x_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right)$,

$$x_{i+\frac{1}{2}} - x_0 = \alpha\left(i + \frac{1}{2}\right)(y_0 + C_0)$$
$$+ \alpha^2\left[A'_0{}''u_{i+\frac{1}{2}} + (A'_2 + B_1)u'_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+2} + B_{2p+1})\Delta^{\cdot 2p} u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right]$$
$$+ \text{const.},$$

où

$$\text{const.} = -\alpha^2\left[\begin{array}{c|c|c} A'_0{}''u_{-\frac{1}{2}} + (A'_2 + B_1) & u'_{-\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+2} + B_{2p+1}) & \Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots \\ + B'_0 & + B'_{2p} & \end{array}\right]$$
$$- \frac{1}{2}\alpha^2\left[\begin{array}{c|c|c} A_0{}'u_{-\frac{1}{2}} + A_2 & \Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p+2} & \Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} + \ldots \\ + B'_1 & + B'_{2p+1} & \end{array}\right]$$

quand on y a remplacé $C_{-\frac{1}{2}}$ et $C'_{-\frac{1}{2}}$ par leurs valeurs.

Or, en vertu des relations (ρ') et (ρ''), on a

$$A'_{2p+2} + B_{2p+1} + B'_{2p} = A_{2p+2} + B'_{2p+1};$$

donc

$$\text{const.} = -\alpha^2\left[A_0\left({}''u'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}{}'u_{-\frac{1}{2}}\right) + (A_2 + B'_1)\left(u'_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}}\right) + \ldots\right.$$
$$\left. + \left(A_{2p+2} + B'_{2p+1}\right)\left(\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}}\right) + \ldots\right];$$

mais, par définition,

$$\Delta^{\cdot 2p} u_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta^{2p+1} u_{-\frac{1}{2}} = \Delta^{2p} u_0,$$

et, par suite,

$$\text{const.} = -\alpha^2\left[A_0\,{}''u_0 + (A_2 + B'_1)u_0 + \ldots + \left(A_{2p+2} + B'_{2p+1}\right)\Delta^{2p}u_0 + \ldots\right] = C'_0;$$

donc

$$(\mathrm{P}_1)\left\{\begin{aligned} & x_{i+\frac{1}{2}} - x_0 \\ & \quad = \alpha\left(i + \frac{1}{2}\right)(y_0 + C_0) + \alpha^2\left[A'_0\,{}''u^{\cdot}_{i+\frac{1}{2}} + (A'_2 + B_1)u^{\cdot}_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right. \\ & \qquad\qquad \left. + \left(A'_{2p+2} + B_{2p+1}\right)\Delta^{\cdot 2p}u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right] + C'_0. \end{aligned}\right.$$

Calcul de $x_i - x_{-\frac{1}{2}}$.

On trouvera de la même manière en ajoutant à $x_i - x_0$, $x_0 - x_{-\frac{1}{2}}$ donné par [O'],

$$x_i - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(i + \frac{1}{2}\right)\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$+ \alpha^2\left[A_0\,{}''u_i + (A_2 + B'_1)u_i + \ldots + \left(A_{2p+2} + B'_{2p+1}\right)\Delta^{2p}u_i + \ldots\right] + \text{const.},$$

où

$$\text{const.} = -\alpha^2\left[\begin{array}{c|c|c} A_0\,{}''u_0 + (A_2 + B'_1) & u_0 + \ldots + (A_{2p+2} + B'_{2p+1}) & \Delta^{2p}u_0 + \ldots \\ + B_0 & + B_{2p} & \end{array}\right]$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2}\left[\begin{array}{c|c|c} + A'_0 & {}'u^{\cdot}_0 + \ldots + A'_{2p} & \Delta^{\cdot 2p-1}u_0 + \ldots \\ & + B_{2p-1} & \end{array}\right].$$

Or, les relations (ρ'), (ρ'') donnent

$$A_{2p+2} + B'_{2p+1} + B_{2p} = A'_{2p+2} + B_{2p+1} + \frac{1}{4}\left(A'_{2p} + B_{2p-1}\right).$$

On aura donc, en désignant par T la somme des deux termes en $\Delta^{2p}u_0$, $\Delta^{\cdot 2p-1}u_0$, qui se correspondent verticalement,

$$T = -\alpha^2\left(A'_{2p} + B_{2p-1}\right)\left(\frac{1}{4}\Delta^{2p}u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{\cdot 2p-1}u_0\right) - \alpha^2\left(A'_{2p+2} + B_{2p+1}\right)\Delta^{2p}u_0.$$

Considérons d'abord le premier terme de T; on a, par définition,

$$\frac{1}{4}\Delta^{2p}u_0 = \frac{1}{4}\left(\Delta^{2p-1}u_{\frac{1}{2}} - \Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}}\right),$$

$$\frac{1}{2}\Delta^{2p-1}u_0 = \frac{1}{4}\left(\Delta^{2p-1}u_{\frac{1}{2}} + \Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}}\right).$$

Substituant dans T, il vient

$$T = \alpha^2(A'_{2p} + B_{2p-1})\frac{1}{2}\Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}} - \alpha^2(A'_{2p+2} + B_{2p+1})\Delta^{2p}u_0;$$

donc

$$\text{const.} = -\alpha^2\left[\begin{array}{l|l|l} {}''u_0 & A_0 + \ldots + \Delta^{2p}u_0 & (A'_{2p+2} + B_{2p+1}) + \ldots \\ -\frac{1}{2}\,{}'u_{-\frac{1}{2}} & \quad -\frac{1}{2}\Delta^{2p+1}u_{-\frac{1}{2}} & \end{array}\right].$$

Et comme

$$\Delta^{2p}u_0 - \frac{1}{2}\Delta^{2p+1}u_{-\frac{1}{2}} = \Delta^{2p}u_{-\frac{1}{2}},$$

on a

$$\text{const.} = -\alpha^2\left[A_0\,{}''u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+2} + B_{2p+1})\Delta^{2p}u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right] = C'_{-\frac{1}{2}};$$

donc, enfin,

$$(Q_1)\left\{\begin{array}{l} x_i - x_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(i + \frac{1}{2}\right)\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) \\ \qquad + \alpha^2\left[A_0\,{}''u_i + (A_2 + B'_1)u_i + \ldots + (A_{2p+2} + B'_{2p+1})\Delta^{2p}u_i + \ldots\right] + C'_{-\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$$

En résumé, nous avons obtenu les formules suivantes :

Premier cas. $\dfrac{dx}{dt} = u.$

(R)

$$x_{i+\frac{1}{2}} - \left\{\begin{matrix} x_{-\frac{1}{2}} \\ x_0 \end{matrix}\right. = \alpha\left(A_0\,{}'u_{i+\frac{1}{2}} + A_2\Delta^1 u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p-1}u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right) + \left\{\begin{matrix} C_{-\frac{1}{2}} \\ C_0 \end{matrix}\right.,$$

$$x_i - \left\{\begin{matrix} x_{-\frac{1}{2}} \\ x_0 \end{matrix}\right. = \alpha\left(A'_0\,{}'u_i + A'_2\Delta^1 u_i + \ldots + A'_{2p}\Delta^{2p-1}u_i + \ldots\right) + \left\{\begin{matrix} C_{-\frac{1}{2}} \\ C_0 \end{matrix}\right..$$

Deuxième cas. $\dfrac{d^2x}{dt^2} = u.$

$$\iint_{x_0}^{x_{-\frac{1}{2}}} = \alpha^2\left[A_0'' \dot{u}_{i+\frac{1}{2}} + (A_2' + B_1)\dot{u}_{i+\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+2} + B_{2p+1})\Delta^{2p}u_{i+\frac{1}{2}} + \ldots\right] + \begin{cases}\mathbf{C}\\ \mathbf{C}'\end{cases},$$

$$\iint_{x_0}^{x_{-\frac{1}{2}}} = \alpha^2\left[A_0'' u_i + (A_2 + B_1')u_i + \ldots + (A_{2p+2} + B'_{2p+1})\Delta^{2p}u_i + \ldots\right] + \begin{cases}\mathbf{C}_1\\ \mathbf{C}_1'\end{cases},$$

avec

$$C_0 = -\alpha\left(A_0''\dot{u}_0 + A_2'\Delta^1 u_0 + \ldots + A'_{2p}\Delta^{2p-1}u_0 + \ldots\right),$$

$$C_{-\frac{1}{2}} = -\alpha\left(A_0' u_{-\frac{1}{2}} + A_2\Delta^1 u_{-\frac{1}{2}} + \ldots + A_{2p}\Delta^{2p-1}u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right).$$

$$C_0' = -\alpha_2\left[A_0'' u_0 + (A_2 + B_1')u_0 + \ldots + (A_{2p+2} + B'_{2p+1})\Delta^{2p}u_0 + \ldots\right],$$

$$C'_{-\frac{1}{2}} = -\alpha^2\left[A_0''\dot{u}_{-\frac{1}{2}} + (A_2' + B_1)\dot{u}_{-\frac{1}{2}} + \ldots + (A'_{2p+2} + B_{2p+1})\Delta^{2p}u_{-\frac{1}{2}} + \ldots\right].$$

$$\mathbf{C} = \alpha(i+1)\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) + C'_{-\frac{1}{2}}, \qquad \mathbf{C}' = \alpha\left(i+\frac{1}{2}\right)(y_0 + C_0) + C_0',$$

$$\mathbf{C}_1 = \alpha\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(y_{-\frac{1}{2}} + C_{-\frac{1}{2}}\right) + C'_{-\frac{1}{2}}, \qquad \mathbf{C}_1' = \alpha i(y_0 + C_0) + C_0'.$$

Voici les valeurs numériques des coefficients, seulement pour les premiers termes. On trouve, par les formules qui expriment ces coefficients,

$$A_0 = 1. \qquad A_2 = +\frac{1}{24}, \qquad A_4 = -\frac{17}{5760}, \qquad A_6 = +\frac{367}{967680},$$

$$B_1' = +\frac{1}{24}, \qquad B_3' = -\frac{7}{5760}, \qquad B_5' = +\frac{129}{967680},$$

$$A_2 + B_1' = +\frac{1}{12}, \qquad A_4 + B_3' = -\frac{1}{240}, \qquad A_6 + B_5' = +\frac{31}{60480}.$$

$$A_0' = 1 \qquad A_2' = -\frac{1}{12}, \qquad A_4' = +\frac{11}{720}, \qquad A_6' = -\frac{191}{60480},$$

$$B_1 = +\frac{1}{24}, \qquad B_3 = -\frac{37}{5760}, \qquad B_5 = +\frac{407}{322560},$$

$$A_2' + B_1 = -\frac{1}{24}, \qquad A_4' + B_3 = +\frac{17}{1920}, \qquad A_6' + B_5 = -\frac{367}{193536}.$$

Il est clair que, dans l'application, on n'aura pas besoin, en général, de toutes les formules (R) et (S); on choisira, dans chaque groupe, suivant les cas.

28. Montrons comment, au moyen de ces formules, on exécute une quadrature première ou seconde :

1° Soit ϖ la longitude du périhélie d'une planète dont la valeur $\varpi_{-\frac{1}{2}}$ est donnée pour l'époque $t_{-\frac{1}{2}}$, et supposons qu'on veuille l'obtenir pour les époques t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, au moyen des valeurs numériques de $\frac{d\varpi}{dt} = u$.

On calculera les valeurs numériques de αu pour les époques t_{-1}, t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, qui, si l'on prend $t_{-\frac{1}{2}} = 1866$, janvier 23, et $\alpha = 30$ jours solaires moyens, seront respectivement

1866 : janvier 8, février 7, mars 9, avril 8, mai 8, juin 7.

Si les différences troisièmes de ces valeurs numériques sont négligeables, on aura, pour déterminer ϖ par la troisième formule (R),

$$\varpi_i - \varpi_{-\frac{1}{2}} = \alpha\left({}'u_i - \frac{1}{12}\Delta^{\cdot\prime} u_i\right) = \alpha\,{}'u_i - \frac{1}{12}\Delta^{\cdot\prime}(\alpha u)_i,$$

avec

$$C_{-\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{ou} \quad {}'u_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{24}\Delta^{\prime} u_{-\frac{1}{2}},$$

et, par suite, avec

$$\alpha\,{}'u_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{24}\Delta^{\prime}(\alpha u)_{-\frac{1}{2}}.$$

D'après cela, on construira le tableau suivant, qui fournira les variations $\delta\varpi$, comptées de 1866, janvier 23 :

t_i.		$\alpha\,{}'u_{i+\frac{1}{2}}$.	αu_i.	$\Delta^{\prime}(\alpha u)_{i+\frac{1}{2}}$.	$\Delta^{\cdot\prime}(\alpha u)_i$.	$\alpha\,{}'u_i$	$-\frac{1}{12}\Delta^{\cdot\prime}(\alpha u)_i =$	$\delta\varpi$.
t_{-1}	Janv. 8		−18,208					
		+ 0,031		−0,751				
t_0	Févr. 7		−18,959		−1,271	− 9,448	− (+0,106) =	− 9,342
		−18,928		−1,791				
t_1	Mars 9		−20,750		−2,276	−29,303	− (+0,190) =	−29,113
		−39,678		−2,762				
t_2	Avril 8		−23,512		−3,182	−51,434	− (+0,265) =	−51,169
		−63,190		−3,601				
t_3	Mai 8		−27,113		−3,916	−76,746	− (+0,326) =	−76,420
		−90,303		−4,231				
t_4	Juin 7		−31,344					

La colonne t_i contient les diverses valeurs du temps pour lesquelles on a calculé $\alpha \frac{d\varpi}{dt}$.

La colonne αu_i les diverses valeurs de $\alpha \frac{d\varpi}{dt}$.

Les colonnes $\Delta^1 (\alpha u)_{i+\frac{1}{2}}$, $\Delta'^1 (\alpha u)_i$ contiennent les différences premières de αu_i et les moyennes arithmétiques de ces différences premières.

Le premier nombre de la colonne $\alpha' u_{i+\frac{1}{2}}$ est égal à $-\frac{1}{24} \cdot 0{,}751$; les autres s'en déduisent par la condition que les différences premières de cette colonne soient les nombres correspondants de la colonne αu_i.

Les trois dernières colonnes s'expliquent d'elles-mêmes.

2° Soit ξ la perturbation de la coordonnée x d'une planète, perturbation comptée du 23 janvier 1866, époque que nous désignerons encore par $t_{-\frac{1}{2}}$.

Comme l'orbite troublée est tangente à l'orbite elliptique au point correspondant à cette époque, on a

$$\xi_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad \left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Si, prenant $\alpha = 30$ jours, on désire les valeurs de ξ pour les époques t_{-1}, $t_0, t_1, \ldots, t_4$, on calculera $\alpha^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$ pour ces différentes dates, et si les différences secondes sont négligeables, on aura, par la troisième formule (S),

$$\xi_i = \alpha^2 \left({}'' u_i + \frac{1}{12} u_i\right) = \alpha^2\, {}'' u_i + \frac{1}{12}\, \alpha^2 u_i,$$

avec

$$C_{-\frac{1}{2}} = 0, \quad C'_{-\frac{1}{2}} = 0$$

ou

$$\alpha^2\, {}' u_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{24}\, \Delta^1 (\alpha^2 u)_{-\frac{1}{2}}, \quad \alpha^2\, {}'' u_{-1} = \frac{1}{24} (\alpha^2 u_0).$$

On construira donc le tableau suivant,

t_i.		$\alpha^2 {}''u_i$.	$\alpha^2 {}'u_{i+\frac{1}{2}}$.	$\alpha^2 u_i$.	Δ'.	$\alpha^2 {}''u_i + \frac{1}{12}\alpha^2 u_i = \xi_i$.
t_{-1}	Janv. 8	−0,0059		−0,1210		$-0{,}0059+(-0{,}0101)=-0{,}0160$
			+0,0008		−0,0200	
t_0	Févr. 7	−0,0051		−0,1410		$-0{,}0051+(-0{,}0117)=-0{,}0168$
			−0,1402			
t_1	Mars 9	−0,1453		−0,1820		$-0{,}1453+(-0{,}0152)=-0{,}1605$
			−0,3222			
t_2	Avril 8	−0,4675		−0,2490		$-0{,}4675+(-0{,}0207)=-0{,}4882$
			−0,5712			
t_3	Mai 8	−1,0387		−0,3290		$-1{,}0387+(-0{,}0274)=-1{,}0661$
			−0,9002			
t_4	Juin 7	−1,9389		−0,4050		$-1{,}9389+(-0{,}0337)=-1{,}9726$

La colonne $\alpha^2 u_i$ contient les valeurs numériques de $\alpha^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$ pour les époques t_i.

Les premiers termes des colonnes $\alpha^2 {}'u_{i+\frac{1}{2}}$, $\alpha^2 {}''u_i$ sont respectivement $-\frac{1}{24}(-0{,}0200)$, $\frac{1}{24}(-0{,}1410)$; les autres s'en déduisent par de simples additions; le reste du tableau s'explique de lui-même.

On doit voir maintenant que, dans la Section I, nous avons introduit le facteur indéterminé α dans les équations (H), afin de leur donner la forme définitive qui se prête immédiatement à la quadrature. Si nous n'avons pas multiplié par α^2 les équations E de la même section, c'est uniquement parce que, dans ce cas, la simplicité des opérations permet d'effectuer cette multiplication, sans aucune crainte d'erreur, dans le cours même du calcul.

Ajoutons que, dans la Section III, nous pratiquerons les quadratures première et seconde comme nous venons de l'indiquer dans ce n° **28**.

SECTION III.

Cette Section est destinée à compléter les deux premières par une application numérique. Nous prenons les éléments de Cérès au 23 janvier 1866, et nous calculons de trente en trente jours, jusqu'au 28 mai de la même année, les perturbations qu'éprouve cette planète de la part de Jupiter. Nous comptons en temps de Greenwich, et nous prenons le jour solaire moyen pour unité.

Dans les deux méthodes, le calcul offre à l'origine une partie commune que nous présenterons d'abord ; nous séparerons ensuite les opérations relatives à chacune d'elles.

Partie commune aux deux méthodes.

29. Après avoir fixé l'instant initial t_{-1} du calcul et l'étendue de l'intervalle de temps α, on calculera, pour les époques $t_{-1}+\alpha$, $t_{-1}+2\alpha$, $t_{-1}+3\alpha,\ldots$: 1° les quantités u, r, v, υ qui se rapportent à Cérès; 2° les lieux héliocentriques de Jupiter. On aura soin de rapporter toutes les longitudes à un équinoxe fixe, soit l'équinoxe de 1866, janvier 1,0 :

1° Éléments de Cérès; calcul de u, r, v, υ.

Pour 1866, janvier 23,0, le supplément au *Nautical Almanac* 1866, donne

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= 125^\circ.58'.23'',7, & \varphi &= 10^\circ.36'.27'',3\\
\varpi &= 148.20.43,9, & \chi &= 4.36.13,4\\
\theta &= 80.49.44,6, & n &= 771'',02100
\end{aligned}$$

Ces longitudes ε, ϖ, θ de l'époque, du périhilie et du nœud sont comptées de l'équinoxe moyen de 1866, janvier 23,0. Nous les réduisons à l'équinoxe moyen de 1866, janvier 1,0, en les corrigeant de la précession correspondante à la différence des deux dates ou en les diminuant de 3'',03. Les valeurs corrigées ε_1, ϖ_1, θ_1 sont

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 125^\circ.58'.20'',7\\
\varpi_1 &= 148.20.40,9\\
\theta_1 &= 80.49.41.6
\end{aligned}$$

u, v, r, υ se calculeront au moyen des formules

$$u-\frac{\sin\chi}{\sin 1''}\sin u = nt+\varepsilon-\varpi = nt+\varepsilon_1-\varpi_1,$$

$$\sqrt{r}\sin\frac{1}{2}v = \sin\frac{1}{2}u.\sqrt{a(1+e)},$$

$$\sqrt{r}\cos\frac{1}{2}v = \cos\frac{1}{2}u.\sqrt{a(1-e)},$$

$$\upsilon = v+\varpi-\theta = v+\varpi_1-\theta_1.$$

t		u	v	υ	$\log r_e$
1866. Janvier.	8,0	$-27°.43'.27''$	$-29°.56'.44''$	$+37°.34'.15''$	0,40994
Février.	7,0	$-20.47.32$	$-22.29.26$	$+45.\ 1.33$	0,40808
Mars...	9,0	$-13.50.\ 2$	$-14.58.48$	$+52.32.11$	0,40672
Avril...	8,0	$-\ 6.51.31$	$-\ 7.25.52$	$+60.\ 5.\ 7$	0,40588
Mai....	8,0	$+\ 0.\ 7.33$	$+\ 0.\ 8.10$	$+67.39.\ 9$	0,40564
Juin...	7,0	$+\ 7.\ 6.17$	$+\ 7.41.52$	$+75.12.51$	0,40592

2° Lieux héliocentriques de Jupiter.

On trouve, dans le *Nautical Almanac* de 1866, les positions héliocentriques suivantes de Jupiter :

t.		Long. hélioc = L'.	Latitude = Λ'.	log r'.
1866. Janvier.	8,0	$281°.\ 5'.57'',4$	$-0°.\ 2'.51'',0$	0,7160071
Février.	7,0	283.35.49,3	−0.\ 6.16,3	0,7150881
Mars...	9,0	286.\ 6.18,1	−0.\ 9.41,9	0,7141674
Avril...	8,0	288.37.24,6	−0.13.\ 7,1	0,7132469
Mai....	8,0	291.\ 9.10,4	−0.16.31,7	0,7123286
Juin...	7,0	293.41.36,1	−0.19.55,2	0,7114138

Ces longitudes étant comptées de l'équinoxe vrai des époques respectives, nous devons les rapporter à l'équinoxe moyen de 1866, janvier 1,0. On trouve dans le *Nautical* la précession et la nutation en longitude correspondant au changement d'origine du temps; leur somme donne la correction qui, appliquée à L', fournira les longitudes l' évaluées en partant de notre équinoxe fixe :

t.		t — 1866. Janv. 1,0.	Précession.	Nutation.	Correction.	l'.
		Jours.				
1866. Janvier.	8,0	7	$-\ 0'',97$	$-5'',69$	$-\ 6'',66$	$281°.\ 5'.50'',7$
Février.	7,0	37	− 5,09	−5,73	−10,82	283.35.38,5
Mars...	9,0	67	− 9,22	−4,51	−13,73	286.\ 6.\ 4,4
Avril...	8,0	97	−13,35	−2,80	−16,15	288.37.\ 8,5
Mai....	8,0	127	−17,48	−1,81	−19,29	291.\ 8.51,1
Juin....	7,0	157	−21,60	−2,00	−23,60	293.41.12,5

Première méthode.

30. Après avoir calculé la partie commune, on choisira pour axes de coordonnées rectilignes l'axe de l'écliptique, la ligne des équinoxes moyens de 1866, janvier 1,0, et la droite perpendiculaire à ces deux-là; l'axe des x positifs étant dirigé vers l'équinoxe du printemps, celui des y positifs vers le solstice d'été, et celui des z positifs vers le pôle boréal de l'écliptique. On continuera le calcul de la manière suivante :

1° Calcul des coordonnées elliptiques rectangulaires x_e, y_e, z_e de Cérès;

2° Calcul des coordonnées x', y', z' de Jupiter, et de sa distance ρ' à Cérès;

3° Calcul des quantités $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{dR}{dx}$, $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{dR}{dy}$, $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{dR}{dz}$, qui, en vertu des équations E, représentent $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, quand, dans une première approximation, on néglige ξ, η, ζ;

4° Formation du tableau des valeurs numériques des quantités précédentes et application des formules de quadrature qui fourniront en secondes d'angle les premières valeurs approchées ξ_1, η_1, ζ_1 de ξ, η, ζ;

5° Substitution de ces valeurs approchées ξ_1, η_1, ζ_1 dans les termes $-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\xi - 3\frac{x_e}{r_e}\partial r\right)$, $-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\eta - 3\frac{y_e}{r_e}\partial r\right)$, $-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\zeta - 3\frac{z_e}{r_e}\partial r\right)$, pour obtenir des valeurs plus approchées de $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{1}{\sin 1''}\alpha^2\frac{d^2\zeta}{dt^2}$. La quadrature correspondante à ces valeurs nouvelles fournira ξ_2, η_2, ζ_2 plus exactes que ξ_1, η_1, ζ_1; et ainsi de suite.

1° *Calcul de x_e, y_e, z_e.*

On posera

$$a\sin A = \cos\theta_1, \qquad a\cos A = -\sin\theta_1\cos\varphi,$$
$$b\sin B = \sin\theta_1, \qquad b\cos B = \cos\theta_1\cos\varphi,$$

et l'on aura

$$x_e = r_e a\sin(A+v), \quad y_e = r_e b\sin(B+v), \quad z_e = r_e\sin\varphi\sin v.$$

On trouve dans notre exemple

$$\log a = \bar{1},99271, \qquad A = \pi - 9^\circ.19'.42'',$$
$$\log b = \bar{1},99982, \qquad B = +80.58\ 58.$$

t.			$\log x_e$.	$\log y_e$.	$\log z_e$.
1866.	Janvier.	8,0	0,07770.n	0,35344	$\bar{1}$,46009
	Février.	7,0	0,16683.n	0,31581	$\bar{1}$,52277
	Mars...	9,0	0,23490.n	0,26696	$\bar{1}$,57141
	Avril...	8,0	0,28759.n	0,20393	$\bar{1}$,60879
	Mai....	8,0	0,32830.n	0,12187	$\bar{1}$,63674
	Juin...	7,0	0,35898.n	0,01168	$\bar{1}$,65630

2° *Calcul de x', y', z' et de ρ'.*

Ces quantités sont données par les formules

$$x' = r'\cos\Lambda'\cos l', \quad y' = r'\cos\Lambda'\sin l', \quad z' = r'\sin\Lambda';$$
$$\rho'^2 = (x_e - x')^2 + (y_e - y')^2 + (z_e - z')^2.$$

t.			$\log x'$.	$\log y'$.	$\log z'$.	$\log \rho'$.
1866.	Janvier.	8,0	0,00039	0,70781.n	$\bar{3}$,63458.n	0,88569
	Février.	7,0	0,08623	0,70274.n	$\bar{3}$,97619.n	0,88147
	Mars...	9,0	0,15717	0,69679.n	$\bar{2}$,16460.n	0,87665
	Avril...	8,0	0,21741	0,68990.n	$\bar{2}$,29485.n	0,87120
	Mai...	8,0	0,26956	0,68205.n	$\bar{2}$,39428.n	0,86515
	Juin...	7,0	0,31533	0,67318.n	$\bar{2}$,47442.n	0,85847

3° *Calcul de* $\dfrac{\alpha^2}{\sin 1''}\dfrac{dR}{dx}$, $\dfrac{\alpha^2}{\sin 1''}\dfrac{dR}{dy}$, $\dfrac{\alpha^2}{\sin 1''}\dfrac{dR}{dz}$.

Ces quantités ne dépendent que de x, y, z; x', y', z'; r', ρ' qui sont actuellement calculés, et de k, m', dont voici les valeurs :

$$\log k = \bar{2},23558, \quad \log m' = \log\frac{1}{1050} = \bar{4},97881.$$

On trouve

$t.$		$\log \frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{dR}{dx}.$	$\log \frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{dR}{dy}.$	$\log \frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{dR}{dz}.$
1866. Janvier.	8,0	$\bar{1}$,07650.*n*	0,02140	$\bar{2}$,50695.*n*
Février.	7,0	$\bar{1}$,13919.*n*	0,01895	$\bar{2}$,56954.*n*
Mars...	9,0	$\bar{1}$,18850.*n*	0,01604	$\bar{2}$,62332.*n*
Avril...	8,0	$\bar{1}$,22670.*n*	0,01265	$\bar{2}$,67001.*n*
Mai....	8,0	$\bar{1}$,25550.*n*	0,00896	$\bar{2}$,71068.*n*
Juin...	7,0	$\bar{1}$,27544.*n*	0,00497	$\bar{2}$,74603.*n*

4° *Valeurs numériques des quantités de l'article* 3° *ou de* $\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, *quand on néglige* ξ, η, ζ (*première approximation*) *et quadrature.*

On a

$t.$		$\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\xi}{dt^2}.$	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\eta}{dt^2}.$	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''} \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$
1866. Janvier.	8,0	$-0'',119$	$+1'',051$	$-0'',0321$
Février.	7,0	$-0,138$	$+1,045$	$-0,0371$
Mars...	9,0	$-0,154$	$+1,038$	$-0,0420$
Avril...	8,0	$-0,169$	$+1,030$	$-0,0468$
Mai....	8,0	$-0,180$	$+1,021$	$-0,0514$
Juin...	7,0	$-0,189$	$+1,012$	$-0,0557$

La troisième formule S, appliquée à ces trois séries (*voir* n° 28, Section II), donne respectivement

$t.$		$\xi_1.$	$\eta_1.$	$\zeta_1.$
1866. Janvier.	8,0	$-0'',016$	$+\ 0'',132$	$-0'',0042$
Février.	7,0	$-0,016$	$+\ 0,131$	$-0,0043$
Mars...	9,0	$-0,155$	$+\ 1,175$	$-0,0417$
Avril...	8,0	$-0,447$	$+\ 3,258$	$-0,1211$
Mai....	8,0	$-0,908$	$+\ 6,371$	$-0,2471$
Juin...	7,0	$-1,550$	$+10,504$	$-0,4245$

5° *Calcul de*

$$-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\xi - 3\frac{x_e}{r_e}\delta r\right),\quad -\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\eta - 3\frac{y_e}{r_e}\delta r\right),\quad -\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\zeta - 3\frac{z_e}{r_e}\delta r\right),$$

où l'on remplacera ξ, η, ζ *par* ξ_1, η_1, ζ_1, *et* δr *par* $\frac{x_e}{r_e}\xi_1 + \frac{y_e}{r_e}\eta_1 + \frac{z}{r_e}\zeta_1$.

On obtient

t.	$-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\xi-3\frac{x_e}{r_e}\delta r\right)$.	$-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\eta-3\frac{y_e}{r_e}\delta r\right)$.	$-\frac{k^2\alpha^2}{r_e^3}\left(\zeta-3\frac{z_e}{r_e}\delta r\right)$.
1866. Janvier. 8,0	$-0'',002$	$+0'',003$	$+0'',0007$
Février. 7,0	$-0,003$	$+0,002$	$+0,0008$
Mars ... 9,0	$-0,028$	$+0,014$	$+0,0073$
Avril... 8,0	$-0,080$	$+0,019$	$+0,0202$
Mai.... 8,0	$-0,149$	$-0,001$	$+0,0373$
Juin.... 7,0	$-0,216$	$-0,061$	$+0,0547$

En ajoutant les nombres de ces trois séries respectivement à ceux des trois premières séries de 4°, on obtient des valeurs plus exactes pour $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\zeta}{dt^2}$.

Ces valeurs sont

t.	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\xi}{dt^2}$.	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\eta}{dt^2}$.	$\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\zeta}{dt^2}$.
1866. Janvier. 8,0	$-0'',121$	$+1'',054$	$-0'',0314$
Février. 7,0	$-0,141$	$+1,047$	$-0,0363$
Mars... 9,0	$-0,182$	$+1,052$	$-0,0347$
Avril... 8,0	$-0,249$	$+1,049$	$-0,0266$
Mai.... 8,0	$-0,329$	$+1,020$	$-0,0141$
Juin... 7,0	$-0,405$	$+0,951$	$-0,0010$

On déduit de ces valeurs numériques, par la formule de quadrature qui a servi à l'article 4°, des valeurs de ξ, η, ζ plus exactes que ξ_1, η_1, ζ_1, et que nous avons déjà désignées par ξ_2, η_2, ζ_2.

$t.$		$\xi_1.$	$\eta_1.$	$\zeta_1.$
		$''$	$''$	$''$
1866. Janvier.	8,0	$-0,016$	$+\ 0,131$	$-0,0041$
Février.	7,0	$-0,017$	$+\ 0,131$	$-0,0041$
Mars...	9,0	$-0,160$	$+\ 1,179$	$-0,0399$
Avril...	8,0	$-0,488$	$+\ 3,278$	$-0,1098$
Mai....	8,0	$-1,066$	$+\ 6,424$	$-0,2060$
Juin...	7,0	$-1,973$	$+10,586$	$-0,3162$

Si l'on appliquait aux valeurs numériques de $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{\alpha^2}{\sin 1''}\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ les formules de la première quadrature, on obtiendrait $\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\zeta}{dt}$. Les valeurs de ξ, η, ζ et de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, à une certaine époque, permettent de calculer, pour cette époque, les variations correspondantes des éléments de l'orbite, au moyen de formules dues à M. Encke, et qu'on trouve dans le *Nautical Almanac* de 1856. C'est en vue de cette transformation, qu'il convient de calculer ξ, η, ζ en secondes d'angle. Nous avons obtenu de cette manière :

$t.$		$\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\xi}{dt}.$	$\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\eta}{dt}.$	$\frac{\alpha}{\sin 1''}\frac{d\zeta}{dt}.$
1866. Février.	7,0	$-0'',0672$	$+0'',5239$	$-0'',0176$
Mars...	9,0	$-0,2267$	$+1,5732$	$-0,0536$
Avril...	8,0	$-0,4406$	$+2,6251$	$-0,0852$
Mai....	8,0	$-0,7292$	$+3,6624$	$-0,1053$

et pour les perturbations des éléments au 8 mai :

$$\delta L = -13'',210 \qquad \delta\chi = -15'',969$$
$$\delta\varpi_1 = -76,295 \qquad \delta\varphi = -\ 0,601$$
$$\delta\theta_1 = -\ 4,658 \qquad \delta n = +\ 0,0878$$

Deuxième méthode.

31. Après avoir calculé la partie commune, on divisera la suite du travail dans les cinq parties suivantes :

1° Calcul des coefficients (1), (2), ..., (13), p, dont la définition a été donnée, Section I, n° **11**, et des quantités $\sin v$, $\cos v$, $\sin u$, $\cos u$,

$\cos u$; on aura alors tous les éléments nécessaires pour former les coefficients de R'_0, S'_0, W'_0 dans les équations (H);

2° Calcul des lieux de la planète perturbatrice rapportée à l'orbite de la planète troublée, comme il a été expliqué au n° 10, Section I;

3° Calcul de R'_0, S'_0, W'_0;

4° Calcul des valeurs numériques des seconds membres des équations (H) pour les diverses époques.

5° Application des formules de quadrature aux séries de ces valeurs numériques correspondantes aux divers éléments.

1° *a. Coefficients* (1), (2),..., (13). *b. Coefficients de* R'_0, S'_0, W'_0 *dans les équations* (H).

a.

$$\log(1) = 1,78636, \quad \log(6) = \bar{2},96771, \quad \log(11) = \bar{2},60419,$$
$$\log(2) = 0,73499, \quad \log(7) = \bar{2},87335, \quad \log(12) = 1,53323,$$
$$\log(3) = 0,44056, \quad \log(8) = 0,40800, \quad \log(13) = 1,09408,$$
$$\log(4) = 1,53464, \quad \log(9) = \bar{1},04334, \quad \log p = 0,43915.$$
$$\log(5) = 1,09549, \quad \log(10) = 0,29963,$$

b. Les nombres entre [ ] sont les logarithmes des coefficients dont ils tiennent la place :

t.		$\cos v$.	$\left(\frac{p}{r}+1\right) r \sin v$.	$r \sin v$.
1866 Janv. 8,0	$\alpha \frac{d\varpi}{dt} =$	$-[\bar{1},93777](4)R'_0$	$+[0,42406.n](5)S'_0$	$+[0,19508](6)W'_0$.
Fév. 7,0		$[\bar{1},96564]$	$[0,30759.n]$	$[0,25776]$
Mars 9,0		$[\bar{1},98498]$	$[0,13667.n]$	$[0,30640]$
Avril 8,0		$[\bar{1},99633]$	$[\bar{1},83557.n]$	$[0,34378]$
Mai. 8,0		$[0,00000]$	$[\bar{2},09951\ ]$	$[0,37173]$
Juin. 7,0		$[\bar{1},99607]$	$[\bar{1},85082\ ]$	$[0,39129]$

$r \cos v$.	$r \sin v$.
$\alpha \frac{d\varphi}{dt} = [0,30899]W'_0$,	$\alpha \frac{d\theta}{dt} = [0,19508](2)W'_0$.
$[0,25736]$	$[0,25776]$
$[0,19081]$	$[0,30640]$
$[0,10372]$	$[0,34378]$
$[\bar{1},98567]$	$[0,37173]$
$[\bar{1},81280]$	$[0,39129]$

$$
\begin{array}{llll}
 & & \sin v. & \dfrac{1}{r}. \\
\alpha^2 \dfrac{dn}{dt} & = - & [\bar{1},69825.n](7)R'_0 - & [\bar{1},59006](8)S'_0. \\
 & & [\bar{1},58266.n] & [\bar{1},59192] \\
 & & [\bar{1},41242.n] & [\bar{1},59328] \\
 & & [\bar{1},11171.n] & [1,59412] \\
 & & [\bar{1},37577\quad] & [\bar{1},59436] \\
 & & [\bar{1},12693\quad] & [\bar{1},59408]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
 & & \sin v. & (\cos v + \cos u). \\
\alpha \dfrac{d\chi}{dt} & = & [\bar{1},69825.n](3)R'_0 + & [0,24346](3)S'_0. \\
 & & [\bar{1},58266.n] & [0,26924] \\
 & & [\bar{1},41242.n] & [0,28713] \\
 & & [\bar{1},11171.n] & [0,29763] \\
 & & [\bar{3},37577\quad] & [0,30103] \\
 & & [\bar{1},12693\quad] & [0,29739]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
 & & \cos v. & r. & \left(\dfrac{p}{r}+1\right) r\sin v. & r\sin v. \\
\alpha \dfrac{d\delta L}{dt} & = - & [\bar{1},93777](9)R'_0 - & [0,40994](10)R'_0 + & [0,42406.n](11)S'_0 + & [0,19508](6)W'_0 + \alpha \displaystyle\int \dfrac{dn}{dt}dt. \\
 & & [\bar{1},96564] & [0,40808] & [0,30759.n] & [0,25776] \\
 & & [\bar{1},98498] & [0,40672] & [0,13667.n] & [0,30640] \\
 & & [\bar{1},99633] & [0,40588] & [\bar{1},83557.n] & [0,34378] \\
 & & [0,00000] & [0,40564] & [\bar{2},09951\quad] & [0,37173] \\
 & & [\bar{1},99607] & [0,40592] & [\bar{1},85082\quad] & [0,39129]
\end{array}
$$

2° *Calcul des lieux de la planète perturbatrice rapportés à l'orbite de Cérès.*

a. Les lieux héliocentriques de Jupiter l'_0, Λ'_0 pour janvier 8 et l'_1, Λ'_1 pour juin 7 donneront d'abord les éléments θ', φ' de cette planète au moyen des formules

$$\sin\left[\frac{1}{2}(l'_1 + l'_0) - \theta'\right] \tang\varphi' = \frac{\sin(\Lambda'_1 + \Lambda'_0)}{2\cos\Lambda'_1 \cos\Lambda'_0 \cos\frac{1}{2}(l'_1 - l'_0)},$$

$$\cos\left[\frac{1}{2}(l'_1 + l'_0) - \theta'\right] \tang\varphi' = \frac{\sin(\Lambda'_1 - \Lambda'_0)}{2\cos\Lambda'_1 \cos\Lambda'_0 \sin\frac{1}{2}(l'_1 - l'_0)}.$$

On trouve

$$\theta' = 99^\circ 1' 17'',9, \quad \varphi' = 1^\circ 18' 40'',2.$$

b. On cherchera ensuite N, N′, J au moyen des formules (6) du n° 10, Section I,

$$\begin{aligned} N &= \pi - 2^\circ.30'.54'',4, \\ N' &= \pi - 20.40.14,0, \\ J &= + 9.22.14,0. \end{aligned}$$

c. On calculera les longitudes de Jupiter dans son orbite L′ au moyen de la formule suffisamment exacte

$$L' = l' + \tang^2 \frac{1}{2}\varphi' \sin 2(l' - \theta').$$

Après quoi les formules (8), n° 10, Section I, donneront β' et λ'. On trouve ainsi :

t.		L′.	λ'.	β'.
1866.	Janvier.. 8,0	281°. 5′.52″,7	22°.28′.23″	3°.36′.35″
	Février.. 7,0	283.35.42,8	24.56.59	3.58.54
	Mars.... 9,0	286. 6.11,0	27.26.12	4.20.54
	Avril.... 8,0	288.37.17,4	29 56.6	4.42.28
	Mai..... 8,0	291. 9. 2,2	32.27.2	5. 3.33
	Juin..... 7,0	293.41.25,7	34.58.38	5.24.14

d. On passera alors au calcul des quantités x'_1, y'_1, z'_1 données par les formules (7) du n° 10, Section I. On en déduira ρ', Δ' :

t.	$\log x'_1$.	$\log y'_1$.	$\log z'_1$.	$\log \rho'$.	$\log \Delta'$.
1866. Janvier.. 8,0	0,69428.*n*	0,19606	$\bar{1}$,51505	0,88569	$\bar{3}$,69099.*n*
Février.. 7,0	0,67935.*n*	0,29860	$\bar{1}$,55670	0,88147	$\bar{3}$,68925.*n*
Mars.... 9,0	0,66038.*n*	0,37902	$\bar{1}$,59394	0,87665	$\bar{3}$,68648.*n*
Avril.... 8,0	0,63701.*n*	0,44401	$\bar{1}$,62746	0,87121	$\bar{3}$,68253.*n*
Mai..... 8,0	0,60882.*n*	0,49725	$\bar{1}$,65781	0,86515	$\bar{3}$,67728.*n*
Juin..... 7,0	0,57534.*n*	0,54126	$\bar{1}$,68536	0,85849	$\bar{3}$,67056.*n*

3° *Calcul de* R'_0, S'_0, W'_0.

$t.$		$\log\left\{R'_0=(1)\left[\Delta' x'_1-\frac{r}{\rho'^3}\right]\right\}$	$\log\{W'_0=(1)[\Delta' y'_1]\}$.	$\log\{S'_0=(1)[\Delta' z'_1]\}$.
1866. Janvier.	8,0	0,05635	$\bar{2}$,99240.n	$\bar{1}$,67341.n
Février.	7,0	0,03098	$\bar{1}$,03231.n	$\bar{1}$,77421.n
Mars...	9,0	$\bar{1}$,99708	$\bar{1}$,06678.n	$\bar{1}$,85186.n
Avril...	8,0	$\bar{1}$,95287	$\bar{1}$,09635.n	$\bar{1}$,91290.n
Mai....	8,0	$\bar{1}$,89577	$\bar{1}$,12145.n	$\bar{1}$,96089.n
Juin..	7,0	$\bar{1}$,82171	$\bar{1}$,14228.n	1,99818.n

4° *Valeurs numériques des seconds membres des équations* (H).

On les obtient en substituant, dans les équations b de l'article 1°, leurs valeurs à (1), (2), ..., (11), R'_0, S'_0, W'_0 :

$t.$		$30\frac{d\varpi_1}{dt}$.	$30\frac{d\varphi}{dt}$.	$30\frac{d\theta_1}{dt}$.	$30^2\frac{dn}{dt}$.	$30\frac{d\chi}{dt}$.	$\left(30\frac{d\delta L}{dt}-30\int\frac{dn}{dt}dt\right)$.
1866. Janv.	8,0	$-18'',208$	$-0'',200$	$-0'',837$	$+0'',512$	$-3'',844$	$-5'',906$
Fév..	7,0	$-18,959$	$-0,195$	$-1,060$	$+0,625$	$-4,181$	$-5,558$
Mars	9,0	$-20,750$	$-0,181$	$-1,283$	$+0,732$	$-4,506$	$-5,140$
Avril	8,0	$-23,512$	$-0,159$	$-1,497$	$+0,831$	$-4,798$	$-4,655$
Mai..	8,0	$-27,113$	$-0,128$	$-1,692$	$+0,919$	$-5,036$	$-4,106$
Juin.	7,0	$-31,344$	$-0,090$	$-1,856$	$+0,994$	$-5,202$	$-3,443$

5° *Une quadrature première appliquée aux séries numériques précédentes donnera immédiatement*

$$\delta\varpi_1,\quad \delta\varphi,\quad \delta\theta_1,\quad 30\,\delta n,\quad \delta\chi,\quad \delta L-\iint\frac{dn}{dt}dt^2.$$ (*Voir* n° 28, Section II.)

Une simple division par 30 donnera δn; δL se déduira de $\left(\delta L-\iint\frac{dn}{dt}dt^2\right)$ par l'addition de $\iint\frac{dn}{dt}dt^2$ que fournira d'ailleurs une quadrature seconde appliquée à la série numérique $30^2\frac{dn}{dt}$. On arrive ainsi aux résultats suivants pour le 8 mai :

t.		$\delta\varpi_1$.	$\delta\varphi$.	$\delta\theta_1$.	$30\,\delta n$.	$\delta\chi$.	δL.
1866.	Févr. 7,0	$-9'',342$	$-0'',098$	$-0'',502$	$+0'',3028$	$-2'',048$	$-2'',748$
	Mars 9,0	$-29,113$	$-0,287$	$-1,674$	$+0,9820$	$-6,394$	$-7,469$
	Avril 8,0	$-51,169$	$-0,458$	$-3,065$	$+1,7643$	$-11,050$	$-11,007$
	Mai 8,0	$-76,420$	$-0,602$	$-4,662$	$+2,6403$	$-15,972$	$-13,200$

Nous trouvons, en résumé, les perturbations suivantes du 23 janvier au 8 mai 1866 :

	1re méthode.	2e méthode.	Différence des résultats (1re m. — 2e m.)
δL	$-13'',210$	$-13'',200$	$-0'',010$
$\delta\varpi_1$	$-76,295$	$-76,420$	$+0,125$
$\delta\theta_1$	$-4,658$	$-4,662$	$+0,004$
$\delta\chi$	$-15,969$	$-15,972$	$+0,003$
$\delta\varphi$	$-0,601$	$-0,602$	$+0,001$
δn	$+0,0878$	$+0,0880$	$-0,0002$

ÉTUDE

DE

CERTAINES FONCTIONS ANALOGUES AUX FONCTIONS X_n

DE LEGENDRE, ETC.,

Par M. F. DIDON,

DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Introduction.

Le travail qui va suivre a pour objet principal l'étude de certaines fonctions de plusieurs variables, analogues aux fonctions X_n de Legendre et aux fonctions trigonométriques $\sin(n \operatorname{arc} \cos x)$ et $\cos(n \operatorname{arc} \cos x)$. C'est surtout au point de vue du développement, au moyen de ces nouvelles expressions algébriques, des fonctions d'un nombre quelconque de variables que cette étude est faite. On sait que les propriétés des polynômes X_n, exprimées par les relations

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'}\, dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2\, dx = \frac{2}{2n+1},$$

permettent d'effectuer avec ces polynômes le développement d'une fonction quelconque de x, tant que du moins la variable x reste comprise entre -1 et $+1$. Il en est de même relativement aux deux autres fonctions indiquées précédemment. Mais ici il y a une différence capitale entre le cas d'une variable et le cas de plusieurs variables. Les seules propriétés des fonctions X_n généralisées ne permettront pas de faire le calcul de leurs coefficients dans la série qui exprimera une fonc-

tion de plusieurs variables; pour arriver à ce résultat, il faudra de toute nécessité considérer de nouvelles fonctions qu'on associera aux premières. Comme dans le cas d'une variable, les nouveaux développements supposeront une relation d'inégalité entre les variables.

C'est M. Hermite qui a fait la généralisation pour deux variables de la fonction X_n et de la fonction $\sin(n \arccos x)$. J'étends cette généralisation à un nombre quelconque de variables pour les fonctions précédentes, et aussi pour la fonction $\cos(n \arccos x)$, non considérée par M. Hermite.

Indépendamment de l'étude précédente, j'ai traité diverses questions s'y rattachant assez directement et qui m'ont paru intéressantes. Ainsi après avoir donné pour l'une des fonctions étudiées auparavant un système d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, ainsi que pour sa fonction associée, j'ai déduit directement de ces deux systèmes les propriétés principales de ces fonctions. J'ai donné aussi la solution complète du premier. J'ai indiqué également, pour tous les cas qui pouvaient se présenter, les valeurs de certaines intégrales doubles qu'on n'avait calculées, dans l'étude précédente, que lorsque les constantes qui y entrent sont comprises entre certaines limites.

Ce travail est divisé en deux Parties : la première est consacrée à la généralisation de la fonction X_n; la seconde à la généralisation des fonctions trigonométriques $\sin(n \arccos x)$ et $\cos(n \arccos x)$.

Je tiens ici à remercier M. Hermite qui m'a indiqué le sujet de ce travail et, sur ce sujet, la plupart des questions que j'ai résolues.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALISATION DES FONCTIONS X_n DE LEGENDRE.

On sait que les fonctions X_n de Legendre proviennent du développement, suivant les puissances croissantes de a, de l'expression

$$(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dans une thèse sur l'attraction des sphéroïdes, M. Olinde Rodrigues, en 1815, a mis la fonction X_n sous la forme

$$\frac{1}{1.2\ldots n.2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Jacobi, en 1826, dans le second volume du *Journal de Crelle*, a retrouvé cette forme. C'est la quantité

$$[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{1}{2}}$$

qui a conduit M. Hermite (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LX) à des fonctions de deux variables, analogues aux fonctions X_n. Cette quantité peut être considérée comme une généralisation de l'expression $(1-2ax+a^2)^{-\frac{1}{2}}$, si l'on écrit cette dernière

$$[(1-ax)^2-a^2(x^2-1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Posant

$$[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{1}{2}}=\sum a^m b^n \mathrm{U}_{m,n},$$

M. Hermite a fait voir que l'on avait

$$\mathrm{U}_{m,n}=\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}}\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}.$$

Ces fonctions jouissent de cette propriété que l'intégrale double $\int\int \mathrm{U}_{m,n}\mathrm{U}_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est nulle, quand $m+n$ est différent de $\mu+\nu$, les variables x et y, dans l'intégrale, étant limitées par la condition $x^2+y^2\leqq 1$. Mais cette propriété ne permet pas d'effectuer le développement d'une fonction de x et de y, suivant les polynômes $\mathrm{U}_{m,n}$, dans les limites $x^2+y^2\leqq 1$.

C'est pour arriver à ce résultat que M. Hermite a associé aux fonctions $\mathrm{U}_{m,n}$ d'autres fonctions $\mathrm{V}_{m,n}$ provenant du développement suivant :

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}=\sum a^m b^n \mathrm{V}_{m,n}.$$

Cette expression nouvelle peut être considérée comme une générali-

sation de l'expression $(1 - 2ax + a^2)^{-\frac{1}{2}}$, où l'on a mis deux variables x et y, et où l'on a doublé l'exposant $-\frac{1}{2}$. L'intégrale double

$$\int\int V_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy,$$

où les variables sont limitées par la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$, est aussi nulle quand $m+n$ et $\mu+\nu$ sont différents, et cette seule propriété ne permet pas non plus de calculer les coefficients des fonctions $V_{m,n}$ dans la série qui représente une fonction quelconque de x et de y. Mais on a

$$\int\int U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy = 0$$

entre les mêmes limites que précédemment, si m et n ne sont pas égaux respectivement à μ et ν. Dans ce dernier cas, on a

$$\int\int U_{m,n} V_{m,n}\, dx\, dy = \frac{\pi}{m+n+1} \frac{(m+n)!}{m!\, n!}.$$

D'où l'on voit qu'on pourra déterminer les coefficients du développement suivant :

$$F(x, y) = \sum A_{m,n} V_{m,n}$$

par la méthode qu'on emploie relativement aux fonctions X_n, ce qui donnera

$$A_{m,n} \frac{\pi}{m+n+1} \frac{(m+n)!}{m!\, n!} = \int\int F(x, y)\, U_{m,n}\, dx\, dy,$$

les variables, dans l'intégrale et dans le développement, étant limitées par la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$. On pourrait de même effectuer le développement de la fonction $F(x, y)$ suivant les fonctions $U_{m,n}$.

Avant de généraliser ces résultats pour un nombre quelconque de variables, je vais compléter un peu l'étude des fonctions $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, et tout d'abord je vais indiquer une manière curieuse de déduire les secondes des premières.

Manière de déduire les fonctions V *des fonctions* U.

On trouve facilement en calculant les coefficients de a^3, a^2b, ab^2 et b^3 dans le développement, suivant les produits des puissances de a et de b, de l'expression $[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{1}{2}}$,

$$U_{3,0}=\frac{1}{2}(5x^3+3xy^2-3x),\quad U_{0,3}=\frac{1}{2}(5y^3+3x^2y-3y),$$
$$U_{2,1}=\frac{3}{2}(3x^2y+y^3-y),\qquad U_{1,2}=\frac{3}{2}(3xy^2+x^3-x).$$

Enlevons, dans les seconds membres de ces égalités, les termes de degré inférieur au troisième, et considérons les égalités ainsi réduites comme formant un système de quatre équations à quatre inconnues (x^3), (xy^2), (x^2y), (y^3). J'ai mis entre parenthèses les quantités x^3, xy^2, x^2y, y^3, qui n'ont plus leur signification habituelle si on laisse à $U_{3,0}$, $U_{2,1}$, $U_{1,2}$, $U_{0,3}$ leurs valeurs effectives. En résolvant le système d'équations, on trouvera, par un calcul facile,

$$(x^3)=\frac{1}{2}U_{3,0}-\frac{1}{6}U_{1,2},\quad (xy^2)=\frac{5}{18}U_{1,2}-\frac{1}{6}U_{3,0},$$
$$(y^3)=\frac{1}{2}U_{0,3}-\frac{1}{6}U_{2,1},\quad (x^2y)=\frac{5}{18}U_{2,1}-\frac{1}{6}U_{0,3}.$$

Les seconds membres de ces formules deviennent, quand on y remplace $U_{3,0}$, $U_{1,2}$, $U_{2,1}$, $U_{0,3}$ par leurs valeurs,

$$x^3-\frac{1}{2}x=\frac{1}{8}V_{3,0},\quad xy^2-\frac{1}{6}x=\frac{1}{24}V_{1,2},$$
$$y^3-\frac{1}{2}y=\frac{1}{8}V_{0,3},\quad x^2y-\frac{1}{6}y=\frac{1}{24}V_{2,1},$$

ce qu'on reconnaîtra facilement, si l'on se reporte aux valeurs suivantes de $V_{0,3}$, $V_{1,2}$, $V_{2,1}$, $V_{3,0}$,

$$V_{3,0}=8x^3-4x,\quad V_{1,2}=24xy^2-4x,$$
$$V_{0,3}=8y^3-4y,\quad V_{2,1}=24x^2y-4y.$$

En général, considérons les égalités qui donnent les valeurs de toutes les fonctions $U_{m,n}$, pour lesquelles la somme $m+n$ est constante et égale à k, et, supprimant dans les seconds membres de ces égalités les termes dont le degré est inférieur à k, regardons les égalités ainsi transformées comme formant un système de $k+1$ équations du premier degré à $k+1$ inconnues x^k, $x^{k-1}y, \ldots, x^h y^{k-h}, \ldots, y^k$. On en déduira, par exemple, pour $x^h y^{k-h}$, l'expression suivante :

$$(x^h y^{k-h}) = \alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \gamma U_{2,k-2} + \ldots,$$

quelques-unes des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ pouvant être nulles.

Je dis que cette expression, quand on y remplace $U_{0,k}, U_{1,k-1}, U_{2,k-2}, \ldots$ par leurs valeurs, devient, sauf un facteur constant, la fonction $V_{h,k-h}$.

En effet, remarquons d'abord que le seul terme de degré k dans cette expression est le terme $x^h y^{k-h}$ avec l'unité pour coefficient; c'est une conséquence de la manière même dont on a formé cette expression. Cela posé, développons le polynôme $\alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \ldots$, suivant les fonctions V, de cette manière

$$\alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \ldots = \sum A_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}.$$

On déterminera $A_{\mu,\nu}$ par l'équation

$$A_{\mu,\nu} \frac{\pi}{\mu+\nu+1} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} = \int\int (\alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \ldots) U_{\mu,\nu}\, dx\, dy,$$

les variables dans l'intégrale satisfaisant à la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$ (*).

D'où l'on voit d'abord que $A_{\mu,\nu}$ sera nul si $\mu+\nu$ est différent de k, car chacune des intégrales $\int\int U_{0,k} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy$, $\int\int U_{1,k-1} U_{\mu,\nu}\, dx\, dy, \ldots$ sera nulle. Il faut donc que $\mu+\nu$ soit égal à k.

Si l'on se rappelle la forme sous laquelle M. Hermite a mis la fonction $U_{\mu,\nu}$, on verra, par une transformation facile, que l'intégrale

$$\int\int (\alpha U_{0,k} + \beta U_{1,k-1} + \ldots) U_{\mu,\nu}\, dx\, dy$$

(*) Je ne répéterai plus cette condition qui intervient dans toutes les intégrales suivantes, elle sera sous-entendue.

est égale à

$$\frac{1}{\mu!\,\nu!\,2^{\mu+\nu}}(-1)^{\mu+\nu}\int\int(x^2+y^2-1)^{\mu+\nu}\frac{d^{\mu+\nu}(\alpha U_{0,k}+\beta U_{1,k-1}+\ldots)}{dx^\mu\,dy^\nu}\,dx\,dy.$$

Maintenant, on reconnaît clairement, puisque le seul terme de degré k, qui existe dans $(\alpha U_{0,k}+\beta U_{1,k-1}+\ldots)$, est $x^h y^{k-h}$, que l'intégrale précédente sera nulle, si l'on n'a pas $\mu=h$, $\nu=k-h$. Le théorème est donc démontré. Le coefficient de $V_{h,k-h}$ sera donné par la formule

$$A_{h,k-h}=\frac{h!\,(k-h)!}{k!\,2^k}.$$

Équations linéaires aux dérivées partielles auxquelles satisfont les fonctions $U_{m,n}$ *et* $V_{m,n}$.

Soit

$$U=\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}.$$

Considérons la fonction homogène

$$T=\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-z^2)^{m+n}}{dx^m\,dy^n},$$

on aura

$$x\frac{dT}{dx}+y\frac{dT}{dz}+z\frac{dT}{dz}=(m+n)T,$$

ou bien

$$x\frac{dT}{dx}+y\frac{dT}{dy}-2(m+n)z^2\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-z^2)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n}=(m+n)T.$$

Si l'on fait $z=1$, dans cette égalité, il vient

$$x\frac{dU}{dx}+y\frac{dU}{dy}-2(m+n)\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n}=(m+n)U,$$

d'où l'on tire

$$(1)\qquad 2(m+n)\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n}=x\frac{dU}{dx}+y\frac{dU}{dy}-(m+n)U.$$

D'un autre côté, soit

$$S = (x^2 + y^2 - 1)^{m+n},$$

on en tire

$$\frac{dS}{dx} = 2(m+n)\,x(x^2+y^2-1)^{m+n-1}.$$

Différentiant cette égalité $m+1$ fois par rapport à x, et n fois par rapport à y, on a

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+n+2}S}{dx^{m+n+2}} &= 2(m+n)\,x\,\frac{d^{m+n+1}(x^2+y^2-1)^{m+n-1}}{dx^{m+1}\,dy^n}\\ &\quad + 2(m+n)(m+1)\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-1}}{dx^m\,dy^n}.\end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (1), on trouve donc l'équation suivante, à laquelle satisfait la fonction U,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{d^2U}{dx^2} - x\,\frac{d\left[x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n)U\right]}{dx}\\ &\qquad -(m+1)\left[x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n)U\right] = 0.\end{aligned}\right.$$

On a de même l'équation

$$\begin{aligned}&\frac{d^2U}{dy^2} - y\,\frac{d\left[x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n)U\right]}{dy}\\ &\qquad -(n+1)\left[x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n)U\right] = 0.\end{aligned}$$

On peut remarquer l'analogie qui existe entre ces équations et l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait la fonction X_n. Cette dernière équation est

$$(1-x^2)\frac{d^2X_n}{dx^2} - 2x\frac{dX_n}{dx} + n(n+1)X_n = 0,$$

et peut s'écrire

$$\frac{d^2X_n}{dx^2} - x\,\frac{d\left(x\frac{dX_n}{dx} - nX_n\right)}{dx} - (n+1)\left(x\frac{dX_n}{dx} - nX_n\right) = 0.$$

Effectuant les différentiations indiquées dans l'équation (2) et la suivante, on met ces équations sous la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} - xy\frac{d^2U}{dx\,dy} + (n-2)x\frac{dU}{dx}\\ &\qquad - (m+1)y\frac{dU}{dy} + (m+n)(m+1)U = 0,\\ &(1-y^2)\frac{d^2U}{dy^2} - xy\frac{d^2U}{dx\,dy} + (m-2)y\frac{dU}{dy}\\ &\qquad - (n+1)x\frac{dU}{dx} + (m+n)(n+1)U = 0.\end{aligned}\right.$$

Ajoutant les équations (3), on obtient l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} + (1-y^2)\frac{d^2U}{dy^2}$$
$$- 2xy\frac{d^2U}{dx\,dy} - 3x\frac{dU}{dx} - 3y\frac{dU}{dy} + (m+n)(m+n+1)U = 0,$$

à laquelle, comme nous le verrons tout à l'heure, satisfait la fonction $V_{m,n}$.

Cherchons le polynôme le plus général satisfaisant au système (3). Soit $Ax^p y^q$ l'un des termes du plus haut degré; je dis que l'on doit avoir $p+q = m+n$. Car il faut que les deux équations suivantes soient satisfaites

$$-p(p-1) - pq + (n-2)p - (m+1)q + (m+n)(m+1) = 0,$$
$$-q(q-1) - pq + (m-2)q - (n+1)p + (m+n)(n+1) = 0.$$

En les ajoutant, on obtient, après simplification, l'équation

$$-(p+q)(p+q+2) + (m+n)(m+n+2) = 0,$$

qui donne $p+q = m+n$.

En les retranchant, et remplaçant dans le résultat p par $m+n-q$, q s'élimine de lui-même, et l'on a une identité. Ceci prouve que le polynôme du degré $m+n$ qui satisfait au système (3) contient plusieurs termes du degré $m+n$.

Mais il ne faudrait pas croire que ce polynôme le plus général est le polynôme $U_{m,n}$ ou $kU_{m,n}$; en d'autres termes, que le système (3) caractérise la fonction $U_{m,n}$, en se bornant aux solutions qui sont des fonc-

tions rationnelles et entières. Il est facile de s'assurer qu'il n'en est pas ainsi.

Si l'on suppose $m = 3$, $n = 0$, le polynôme le plus général qui satisfait au système (3), est

$$H(5x^3 + 3xy^2 - 3x) + K(2y^3 + 12x^2y - 3y)$$

avec deux constantes arbitraires. Le coefficient de H est, sauf un facteur constant, la valeur de $U_{3,0}$; car on a

$$U_{3,0} = \frac{1}{2}(5x^3 + 3xy^2 - 3x);$$

mais il y a un autre polynôme.

Si l'on suppose $m = 3$, $n = 2$, le polynôme le plus général qui satisfait au système (3) est

$$\begin{aligned} &H(7x^5 + 30x^3y^2 + 15xy^4 - 10x^3 - 18xy^2 + 3x) \\ &\quad + Ky(120x^4 + 160x^2y^2 + 24y^4 + 40y^2 - 120x^2 + 15), \end{aligned}$$

avec deux constantes arbitraires H et K. Le coefficient de H est, sauf un facteur constant, la valeur de $U_{3,2}$; car on a

$$U_{3,2} = \frac{5}{4}(7x^5 + 30x^3y^2 + 15xy^4 - 10x^3 - 18xy^2 + 3x).$$

Je vais démontrer, en général, que le système (3) est satisfait par deux polynômes du degré $m + n$, et indiquer un moyen très-simple de calculer les coefficients de ces polynômes.

Pour cela, je remarque que la solution complète du système (3) contient quatre constantes arbitraires. En effet, si l'on se donne pour $x = 0$, $y = 0$ les valeurs de U, $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$, $\frac{d^2U}{dx\,dy}$, on en conclura les valeurs de $\frac{d^2U}{dx^2}$ et de $\frac{d^2U}{dy^2}$.

En différentiant successivement par rapport à x et par rapport à y les équations du système, on aura quatre équations qui donneront les valeurs de $\frac{d^3U}{dx^3}$, $\frac{d^3U}{dx^2dy}$, $\frac{d^3U}{dx\,dy^2}$, $\frac{d^3U}{dy^3}$. Ces valeurs seront finies, car le déterminant du système de ces quatre équations est

$$(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - x^2 - y^2).$$

En continuant de la même manière, on verra que toutes les dérivées successives de U pourront s'exprimer au moyen des valeurs arbitraires données primitivement à U, $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dU}{dy}$ et $\frac{d^2U}{dx\,dy}$. On conclut de là que la solution complète du système d'équations aux dérivées partielles ne contient que quatre constantes arbitraires. Cela posé, je cherche un système d'équations de la forme

$$(1-x^2)\frac{d^2P}{dx^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + hx\frac{dP}{dx} + h'y\frac{dP}{dy} + h''P = 0,$$
$$(1-y^2)\frac{d^2P}{dy^2} - xy\frac{d^2P}{dx\,dy} + kx\frac{dP}{dx} + k'y\frac{dP}{dy} + k''P = 0,$$

tel, qu'en posant $\frac{d^{m+n}P}{dx^m\,dy^n} = U$, la fonction U satisfasse au système (3).

Pour cela, je différentie m fois par rapport à x, et n fois par rapport à y, les équations précédentes; j'obtiens alors un système d'équations en U, analogue au système (3). Les coefficients seuls diffèrent dans les deux systèmes. Je détermine ensuite h, h', h'', k, k', k'', de manière que les coefficients correspondants soient les mêmes.

On trouve sans peine que le système d'équations cherché est, en posant $m+n=q$,

$$(4)\quad \begin{cases} (1-x^2)\dfrac{dP^2}{dx^2} - xy\dfrac{d^2P}{dx\,dy} + 2(q-1)x\dfrac{dP}{dx} - y\dfrac{dP}{dy} + 2qP = 0, \\ (1-y^2)\dfrac{dP^2}{dy^2} - xy\dfrac{d^2P}{dx\,dy} + 2(q-1)y\dfrac{dP}{dy} - x\dfrac{dP}{dx} + 2qP = 0. \end{cases}$$

Les solutions générales des systèmes (3) et (4) contenant chacune quatre constantes arbitraires, on déduira la première solution de la seconde.

Or je vais démontrer que ce système (4) a deux solutions polynômes du degré $2q$, l'un ne contenant que des termes de la forme $Hx^{2\alpha}y^{2\beta}$, l'autre que des termes de la forme $Hx^{2\alpha+1}y^{2\beta+1}$.

On reconnait tout d'abord qu'un polynôme ne peut satisfaire à ce système que s'il est du degré $2q$. Soit, en effet, Ax^hy^k un des termes du degré le plus élevé. On doit avoir les deux équations suivantes :

$$-h(h-1) - hk + 2h(q-1) - k + 2q = 0,$$
$$-h(k-1) - hk + 2k(q-1) - h + 2q = 0,$$

qui peuvent s'écrire

$$(h+1)(2q-h-k)=0,$$
$$(k+1)(2q-h-k)=0,$$

d'où

$$h+k=2q.$$

Cela posé, soit $P=\sum \alpha_{\mu,\nu}x^\mu y^\nu$ un polynôme du degré $2q$; cherchons à en déterminer les coefficients de manière à ce qu'il satisfasse au système (4).

On aura une série d'équations analogues aux suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases}(\mu+2)\alpha_{\mu+2,\nu}=(\mu+\nu-2q)\alpha_{\mu,\nu},\\ (\nu+2)\alpha_{\mu,\nu+2}=(\mu+\nu-2q)\alpha_{\mu,\nu}.\end{cases}$$

Supposons que l'on ait $\mu+\nu=2q-1$. Comme $\alpha_{\mu+2,\nu}$ est nul, on voit que $\alpha_{\mu,\nu}$ le sera également. Donc le polynôme ne contient pas de termes du degré $2q-1$. On en conclut immédiatement qu'il ne contiendra pas non plus de termes du degré $2q-3$, et en général de termes du degré $2q-k$, k étant impair.

Donnons-nous la valeur M de $\alpha_{2q,0}$. La première des équations (5) nous déterminera, au moyen de M, les valeurs de $\alpha_{2q-2,0}$, $\alpha_{2q-4,0}$, ..., $\alpha_{0,0}$, et l'on aura

$$\alpha_{2q,0}=M,\quad \alpha_{2q-2,0}=-qM,$$
$$\alpha_{2q-2h,0}=(-1)^h\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-h+1)}{h!}M.$$

La seconde des équations (5) nous donnera successivement

$$\alpha_{2q-2h,2}=(-1)^{h+1}\frac{h}{1}\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-h+1)}{h!}M,$$
$$\alpha_{2q-2h,2k}=(-1)^{h+k}\frac{h(h-1)(h-2)\ldots(h-k+1)}{k!}\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-h+1)}{h!}M.$$

Nous déterminerons donc ainsi, au moyen de M, tous les coefficients des termes $x^\mu y^\nu$, dans lesquels μ et ν sont pairs, et pas d'autres. Par conséquent, nous trouvons un polynôme qu'il est facile de mettre sous la forme $M(x^2+y^2-1)^q$.

On peut faire à ce raisonnement une objection. Je ne me suis pas servi de toutes les équations (5) où entrent des coefficients $\alpha_{2q-2h,2k}$; mais il

est facile de voir que, pour les valeurs précédentes de ces coefficients, toutes les équations qu'on déduit de la première du système (5), en donnant à ν les valeurs $2, 4, 6, \ldots$, et qui sont celles que nous n'avons pas employées, sont satisfaites d'elles-mêmes. Le type de ces équations est

$$(2q-2h+2)\,\alpha_{2q-2h+2,2k} = -2(h-k)\,\alpha_{2q-2h,2k}.$$

Si l'on remplace dans cette équation $\alpha_{2q-2h+2,2k}$ et $\alpha_{2q-2h,2k}$ par leurs valeurs trouvées précédemment, elle sera satisfaite identiquement.

Si l'on se donne la valeur N de $\alpha_{2q-1,1}$, on déterminera au moyen du système (5), et sans la moindre impossibilité, tous les coefficients $\alpha_{\mu,\nu}$ dans lesquels μ et ν sont des nombres entiers impairs, dont la somme n'est pas supérieure à $2q$. On obtiendra ainsi un autre polynôme, impair en x et en y. Comme on a employé toutes les équations (5), on n'a que ces deux polynômes. Il leur correspondra pour le système d'équations (3) deux solutions qui seront des polynômes du degré $m+n$, dans chacun desquels les exposants de x, et ceux de y iront en variant de deux unités; mais tandis que, dans le premier, les exposants de x seront de même parité que m, dans le second, ces exposants seront impairs si m est pair, et pairs si m est impair.

Je passe maintenant à la recherche d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel satisfasse la fonction $V_{m,n}$.

On a

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1} = \sum a^m b^n V_{m,n}. \tag{6}$$

On en déduit, en différentiant l'égalité précédente, successivement par rapport à x, y, a et b,

$$2a(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-2} = \sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dx}, \tag{7}$$

$$2b(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-2} = \sum a^m b^n \frac{dV_{m,n}}{dy}, \tag{8}$$

$$2(x-a)(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-2} = \sum m a^{m-1} b^n V_{m,n}, \tag{9}$$

$$2(y-b)(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-2} = \sum n a^m b^{n-1} V_{m,n}. \tag{10}$$

Comparant successivement les égalités (7) et (9), (7) et (8), (7) et (10), (6) et (7), on conclut

$$(x-a)\sum a^m b^n \frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx} = a\sum m a^{m-1} b^n \mathrm{V}_{m,n},$$

$$a\sum a^m b^n \frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dy} = b\sum a^m b^n \frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx},$$

$$(y-b)\sum a^m b^n \frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx} = a\sum n a^m b^{n-1} \mathrm{V}_{m,n},$$

$$2a\sum a^m b^n \mathrm{V}_{m,n} = (1-2ax-2by+a^2+b^2)\sum a^m b^n \frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx},$$

d'où l'on déduit les relations suivantes :

$$x\frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx} - \frac{d\mathrm{V}_{m-1,n}}{dx} = m\mathrm{V}_{m,n}, \tag{11}$$

$$\frac{d\mathrm{V}_{m-1,n}}{dy} = \frac{d\mathrm{V}_{m,n-1}}{dx}, \tag{12}$$

$$y\frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx} - \frac{d\mathrm{V}_{m,n-1}}{dx} = (n+1)\mathrm{V}_{m-1,n+1}, \tag{13}$$

$$2\mathrm{V}_{m-1,n} = \frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx} - 2x\frac{d\mathrm{V}_{m-1,n}}{dx} - 2y\frac{d\mathrm{V}_{m,n-1}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}_{m-2,n}}{dx} + \frac{d\mathrm{V}_{m,n-2}}{dx}. \tag{14}$$

Dans la dernière égalité, je substitue à la place de $\frac{d\mathrm{V}_{m-2,n}}{dx}$ et $\frac{d\mathrm{V}_{m,n-2}}{dx}$ leurs valeurs $x\frac{d\mathrm{V}_{m-1,n}}{dx} - (m-1)\mathrm{V}_{m-1,n}$ et $y\frac{d\mathrm{V}_{m,n-1}}{dx} - n\mathrm{V}_{m-1,n}$ tirées des relations (11) et (13), après qu'on y a remplacé, dans la première, m par $m-1$, et, dans la seconde, n par $n-1$. Il vient alors

$$(m+n+1)\mathrm{V}_{m-1,n} = \frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx} - x\frac{d\mathrm{V}_{m-1,n}}{dx} - y\frac{d\mathrm{V}_{m,n-1}}{dx}. \tag{15}$$

Différentions par rapport à x : nous aurons

$$(m+n+2)\frac{d\mathrm{V}_{m-1,n}}{dx} = \frac{d^2\mathrm{V}_{m,n}}{dx^2} - x\frac{d^2\mathrm{V}_{m-1,n}}{dx^2} - y\frac{d^2\mathrm{V}_{m,n-1}}{dx^2}.$$

Mais

$$\frac{d\mathrm{V}_{m-1,n}}{dx} = x\frac{d\mathrm{V}_{m,n}}{dx} - m\mathrm{V}_{m,n}.$$

à cause de l'équation (11);

$$\frac{d^2 V_{m-1,n}}{dx^2} = x\frac{d^2 V_{m,n}}{dx} - (m-1)\frac{dV_{m,n}}{dx},$$

à cause de la relation précédente; enfin

$$\frac{d^2 V_{m,n-1}}{dx^2} = \frac{d^2 V_{m-1,n}}{dx\,dy},$$

à cause de la relation (12), et cette dernière expression est égale, en vertu de l'équation (11), à

$$x\frac{d^2 V_{m,n}}{dx\,dy} - m\frac{dV_{m,n}}{dy}.$$

Donc on a, après réduction, l'équation

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2 V_{m,n}}{dx^2} - xy\frac{d^2 V_{m,n}}{dx\,dy} \\ &\quad - (n+3)x\frac{dV_{m,n}}{dx} + my\frac{dV_{m,n}}{dy} + (m+n+2)V_{m,n} = 0. \end{aligned}\right.$$

On trouverait de même

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-y^2)\frac{d^2 V_{m,n}}{dy^2} - xy\frac{d^2 V_{m,n}}{dx\,dy} \\ &\quad - (m+3)y\frac{dV_{m,n}}{dy} + nx\frac{dV_{m,n}}{dx} + n(m+n+2)V_{m,n} = 0. \end{aligned}\right.$$

En ajoutant ces relations (16 et 17), on trouve l'équation

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{d^2 V_{m,n}}{dx^2} + (1-y^2)\frac{d^2 V_{m,n}}{dy^2} - 2xy\frac{d^2 V_{m,n}}{dx\,dy} \\ &\quad - 3x\frac{dV_{m,n}}{dx} - 3y\frac{dV_{m,n}}{dy} + (m+n)(m+n+2)V_{m,n} = 0, \end{aligned}\right.$$

à laquelle satisfait, comme nous l'avons vu plus haut, la fonction $U_{m,n}$.

On peut remarquer que ces équations (16) et (17) peuvent s'écrire

de la manière suivante, en y remplaçant $V_{m,n}$ par V :

$$\frac{d^2V}{dx^2} - x\frac{d\left[x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+2)V\right]}{dx}$$
$$+ m\left[x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+2)V\right] = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} - y\frac{d\left[x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+2)V\right]}{dy}$$
$$+ n\left[x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+2)V\right] = 0.$$

Cherchons à satisfaire aux équations (16) et (17) par un polynôme. Soit Ax^py^q l'un des termes du plus haut degré.

On a les deux équations

$$-p(p-1) - pq - (n+3)p + mq + m(m+n+2) = 0,$$
$$-q(q-1) - pq - (m+3)q + np + n(m+n+2) = 0.$$

En les ajoutant, on trouve, aprés réduction,

$$-(p+q)(p+q+2) + (m+n)(m+n+2) = 0,$$

d'où

$$p+q = m+n.$$

En les retranchant et remplaçant dans le résultat $p^2 - q^2$ par

$$(p-q)(m+n),$$

on obtient une équation du premier degré, qui, combinée avec l'équation

$$p+q = m+n,$$

forme un système dont la solution est

$$p = m, \quad q = n.$$

On voit donc que le seul terme de degré $m+n$ du polynôme, qui est la solution du système (16) et (17), est un terme en x^my^n.

Pour donner une application de ces équations aux dérivées partielles, je vais en conclure les égalités

$$\int\int U_{m,n}V_{\mu,\nu}\,dx\,dy = 0, \quad \int\int U_{m,n}U_{\mu,\nu}\,dx\,dy = 0, \quad \int\int V_{m,n}V_{\mu,\nu}\,dx\,dy = 0,$$

quand $m+n$ est différent de $\mu+\nu$.

Reprenons l'équation (18), dans laquelle nous remplacerons successivement $V_{m,n}$ par U et V; nous obtiendrons ainsi deux équations.

Multiplions la première par $V\,dx\,dy$, la seconde par $U\,dx\,dy$; retranchons les résultats, et intégrons entre les limites $x^2+y^2 \overset{=}{<} 1$; il vient

$$\begin{aligned}
&[(\mu+\nu)(\mu+\nu+2)-(m+n)(m+n+2)]\int\int UV\,dx\,dy \\
&= \int\int(1-x^2)\left(V\frac{d^2U}{dx^2}-U\frac{d^2V}{dx^2}\right)dx\,dy+\int\int(1-y^2)\left(V\frac{d^2U}{dy^2}-U\frac{d^2V}{dy^2}\right)dx\,dy \\
&\quad -2\int\int xy\left(V\frac{d^2U}{dx\,dy}-U\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)dx\,dy \\
&\quad -3\int\int x\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right)dx\,dy-3\int\int y\left(V\frac{dU}{dy}-U\frac{dV}{dy}\right)dx\,dy.
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que le second membre est nul.

Pour cela, je remarque que l'on a les identités suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1-x^2)\left(V\frac{d^2U}{dx^2}-U\frac{d^2V}{dx^2}\right)-2x\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right) \\
&\qquad = \frac{d\left[(1-x^2-y^2)\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right)\right]}{dx}+y^2\left(V\frac{d^2U}{dx^2}-U\frac{d^2V}{dx^2}\right), \\
&(1-y^2)\left(V\frac{d^2U}{dy^2}-U\frac{d^2V}{dy^2}\right)-2y\left(V\frac{dU}{dy}-U\frac{dV}{dy}\right) \\
&\qquad = \frac{d\left[(1-x^2-y^2)\left(V\frac{dU}{dy}-U\frac{dV}{dy}\right)\right]}{dy}+x^2\left(V\frac{d^2U}{dy^2}-U\frac{d^2V}{dy^2}\right), \\
&-xy\left(V\frac{d^2U}{dx\,dy}-U\frac{d^2V}{dx\,dy}\right)-x\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right) \\
&\qquad = -\frac{d\left[xy\left(V\frac{dU}{dx}-U\frac{dV}{dx}\right)\right]}{dy}+xy\left(\frac{dV}{dy}\frac{dU}{dx}-\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dx}\right),
\end{aligned}$$

$$- xy\left(V\frac{d^2U}{dx\,dy} - U\frac{d^2V}{dx\,dy} - y\left(V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}\right)\right.$$

$$= -\frac{d\left[xy\left(V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}\right)\right]}{dx} + xy\left(\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dx} - \frac{dV}{dy}\frac{dU}{dx}\right).$$

Si l'on observe, en outre, que les intégrales

$$\int\int\frac{d\left[(1-x^2-y^2)\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right)\right]}{dx}\,dx\,dy$$

et

$$\int\int\frac{d\left[(1-x^2-y^2)\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dy}\right)\right]}{dy}\,dx\,dy$$

sont nulles, on verra que le second membre de la relation donnée plus haut se réduit à

$$\int_{-1}^{+1} y^2\left[V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right]_x dy + \int_{-1}^{+1} x^2\left[V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}\right]_y dx$$
$$- \int_{-1}^{+1} dx\left[xy\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right)\right]_y - \int_{-1}^{+1} dy\left[xy\left(V\frac{dU}{dy} - U\frac{dV}{dy}\right)\right]_x.$$

L'indice x, qui se trouve à droite de deux crochets, indique que l'on a la différence des valeurs que prennent les quantités entre crochets, lorsqu'on y remplace successivement x par $+\sqrt{1-y^2}$ et $-\sqrt{1-y^2}$.

L'indice y placé à droite des deux autres crochets a une signification analogue.

Je vais démontrer que l'on a

$$\int_{-1}^{+1} y^2\left[V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right]_x dy = \int_{-1}^{+1} dx\left[xy\left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dU}{dx}\right)\right]_y.$$

Pour cela, je considère un terme quelconque Ax^py^q du polynôme $V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$; nous allons voir qu'il donne dans les deux intégrales le même résultat. Ce résultat est zéro, si p est pair, et aussi, dans le cas où p est impair, si q est impair. Dans le cas de p impair et q pair, les deux résultats fournis par le terme en question, dans les deux inté-

grales, sont

$$4A\int_0^1 (\sqrt{1-y^2})^p y^{q+2}\,dy \quad \text{et} \quad 4A\int_0^1 x^{p+1}(\sqrt{1-x^2})^{q+1}\,dx.$$

Or on passe du premier au second, en posant $y=\sqrt{1-x^2}$. De même, les deux autres intégrales du second membre sont égales, de sorte que les théorèmes annoncés sont prouvés.

On a dû remarquer les fonctions

$$x\frac{dU_{m,n}}{dx}+y\frac{dU_{m,n}}{dy}-(m+n)U_{m,n}, \quad x\frac{dV_{m,n}}{dx}+y\frac{dV_{m,n}}{dy}+(m+n+2)V_{m,n},$$

qui entrent dans les équations aux dérivées partielles. Ces fonctions peuvent être considérées comme naissant du développement de certaines expressions, qui ont une relation très-simple avec celles qui engendrent les fonctions $U_{m,n}$, $V_{m,n}$.

On prouvera sans difficulté que l'on a

$$\begin{aligned} &2(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-2} \\ &\quad=\sum a^m b^n\left[x\frac{dV_{m,n}}{dx}+y\frac{dV_{m,n}}{dy}+(m+n+2)V_{m,n}\right], \\ &(a^2+b^2)[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-\frac{3}{2}} \\ &\quad=\sum a^m b^n\left[x\frac{dU_{m,n}}{dx}+y\frac{dU_{m,n}}{dy}-(m+n)U_{m,n}\right]. \end{aligned}$$

On peut se servir de ce dernier résultat pour obtenir directement, et sans employer la forme que M. Hermite a donnée aux fonctions $U_{m,n}$, le système d'équations que nous avons déjà trouvé pour ces fonctions. Je n'insiste pas là-dessus.

Il m'a semblé intéressant de donner la solution complète du système d'équations dont la fonction $U_{m,n}$ est une solution. Nous avons trouvé une seconde solution, qui est un polynôme; mais il en existe deux autres que nous allons indiquer. Pour cela, je reprends le système (4). Remarquant que les premiers membres des équations de ce système sont des dérivées, on en conclura

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1-x^2)\frac{dP}{dx}-xy\frac{dP}{dy}+2qxP=\varphi(y), \\ &(1-y^2)\frac{dP}{dy}-xy\frac{dP}{dx}+2qyP=\psi(x). \end{aligned}\right.$$

En résolvant ce système par rapport à $\frac{dP}{dx}$ et $\frac{dP}{dy}$, on l'écrira de la manière suivante :

$$(19)' \quad \begin{cases} (1-x^2-y^2)\dfrac{dP}{dx} + 2qxP = \varphi(y)(1-y^2) + xy\psi(x), \\ (1-x^2-y^2)\dfrac{dP}{dy} + 2qyP = \psi(x)(1-x^2) + xy\varphi(y). \end{cases}$$

On en déduit, en différentiant la première de ces équations par rapport à y, la seconde par rapport à x, et en retranchant membre à membre les relations résultantes,

$$2(q+1)\left(x\frac{dP}{dy} - y\frac{dP}{dx}\right) = (1-y^2)\varphi'(y) - 3y\varphi(y) + 3x\psi(x) - (1-x^2)\psi'(x).$$

Mais les équations (19) donnent

$$x\frac{dP}{dy} - y\frac{dP}{dx} = x\psi(x) - y\varphi(y),$$

de sorte qu'on a, entre les fonctions $\psi(x)$ et $\varphi(y)$, la relation

$$(1-x^2)\psi'(x) + (2q-1)x\psi(x) = (1-y^2)\varphi'(y) + (2q-1)y\varphi(y).$$

Chacun des membres de cette équation est évidemment égal à une même constante A. On en conclut les valeurs de $\psi(x)$ et $\varphi(y)$, savoir :

$$\psi(x) = B(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}} + A(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}} \int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}},$$

$$\varphi(y) = C(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}} + A(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}} \int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}}.$$

Portons ces valeurs dans les équations (19), et résolvons la première de ces équations. On trouve, en posant

$$P = (1-x^2-y^2)^q Q,$$

$$
\begin{aligned}
Q = \Pi(y) &+ C(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\\
&+ A(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\\
&+ By\int_0^x \frac{x(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} + Ay\int_0^x dx\left[\frac{x(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}}}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right].
\end{aligned}
$$

Résolvons de même la seconde des équations (19'). En posant

$$P = (1-x^2-y^2)^q Q',$$

on trouvera pour Q' une valeur analogue à celle de Q; seulement il y aura dans Q' une fonction arbitraire de x, $\chi(x)$. Il faut avoir identiquement $Q' = Q$. J'écrirai cette identité de la manière suivante :

$$
\begin{aligned}
&\Pi(y) + B\left[y\int_0^x \frac{x(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} - (1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right]\\
&\quad + A\left\{ y\int_0^x dx\left[\frac{x(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}}}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right]\right.\\
&\qquad\left. - (1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}}\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} + \int_0^x dx\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right\}\\
&= \chi(x) + C\left[x\int_0^y \frac{y(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} - (1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right]\\
&\quad + A\left\{ x\int_0^y dy\left[\frac{y(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}}}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right]\right.\\
&\qquad\left. - (1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} + \int_0^y dy\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right\}.
\end{aligned}
$$

Les termes sont disposés de manière que le premier membre ne contient que la variable y, et le second membre que la variable x, comme

je vais le faire voir. Je le démontrerai pour le second membre. La dérivée, par rapport à y du coefficient de C, peut être écrite

$$\frac{xy(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} + 2(q+1)y(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{-x^2\,dx}{(1-x^2-y^2)^{q+2}}$$
$$-y(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}.$$

Si l'on intègre par parties le terme du milieu, en considérant $\frac{x\,dx}{(1-x^2-y^2)^{q+2}}$ comme une différentielle par rapport à x, on reconnait immédiatement que l'expression précédente est nulle. On verra qu'il en est de même du coefficient de A. Donc, en définitive, il faudra égaler les deux membres de l'égalité précédente à une constante D, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
P = {} & D(1-x^2-y^2)^q + C(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}(1-x^2-y^2)^q\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
& + B(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}(1-x^2-y^2)^q\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
& + A(1-x^2-y^2)^q\Bigg[(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
& \qquad + (1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}}\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}} \\
& \qquad - \int_0^x\int_0^y \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\Bigg].
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que le coefficient de A est le second polynôme que nous avons déjà trouvé comme solution du système (4). Cherchons en effet les solutions de ce système qui sont des polynômes. Reportons-nous au système (19). Il faut que $\varphi(y)$ et $\psi(x)$ soient des polynômes entiers. Or, dans $\varphi(y)$, le coefficient de A est un polynôme entier. C'est ce qu'on reconnait immédiatement au moyen de la formule de réduction

$$\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q+\frac{1}{2}}} = \frac{2(q-1)}{2q-1}\int_0^y \frac{dy}{(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2q-1}\,\frac{y}{(1-y^2)^{q-\frac{1}{2}}}.$$

Donc $B = C = 0$. Mais le système (19), pour être satisfait par la solution $(x^2 + y^2 - 1)^q$, doit avoir ses seconds membres nuls. Donc si A est différent de zéro, il n'a plus pour solution que le second polynôme, qui, par conséquent, est le coefficient de A dans la solution générale.

Mais il est facile de démontrer directement que le coefficient de A, que je désignerai par E_q, est un polynôme du degré $2q$, ne contenant que des puissances impaires de x et de y. D'abord on voit que E_q change de signe quand on change x en $-x$, et aussi quand on change y en $-y$. Donc si E_q est un polynôme, il ne contiendra que des puissances impaires de x et de y.

Si l'on considère les égalités

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-t^2-z^2)^2} = \frac{1}{2(1-t^2)}\,\frac{z}{1-t^2-z^2} + \frac{1}{2(1-t^2)}\int_0^z \frac{dz}{1-t^2-z^2},$$

on reconnaîtra que l'on a

$$\begin{aligned}E_1 = xy + (1-x^2-y^2)\Bigg[&\frac{x}{2}\int_0^y \frac{dy}{1-x^2-y^2} + \frac{y}{2}\int_0^x \frac{dx}{1-x^2-y^2}\\ &-\frac{y}{2}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)(1-x^2-y^2)} - \frac{1}{2}\int_0^x dx\left(\frac{1}{1-x^2}\int_0^y \frac{dy}{1-x^2-y^2}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^x dx\left(\frac{1}{1-x^2}\int_0^y \frac{dy}{1-x^2-y^2}\right)\\ &\quad= \frac{1}{4}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\log\frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y}\\ &\quad= \frac{x}{4\sqrt{1-x^2}}\log\frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y} - \frac{y}{2}\int_0^x \frac{x^2}{1-x^2}\,\frac{dx}{1-x^2-y^2}\\ &\quad= \frac{x}{2}\int_0^y \frac{dy}{1-x^2-y^2} + \frac{y}{2}\int_0^x \frac{dx}{1-x^2-y^2} - \frac{y}{2}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)(1-x^2-y^2)},\end{aligned}$$

Donc, finalement, $E_1 = xy$. La proposition est donc vraie pour $q = 1$. Je vais faire voir généralement qu'elle est vraie pour une valeur quelconque de q, si elle l'est pour la valeur $q-1$.

On a

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-t^2-z^2)^{q+1}} = \frac{1}{2q(1-t^2)}\frac{z}{(1-t^2-z^2)^q} + \frac{2q-1}{2q(1-t^2)}\int_0^z \frac{z}{(1-t^2-z^2)^q},$$

$$\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{q+\frac{1}{2}}} = \frac{2(q-1)}{2q-1}\int_0^z \frac{dz}{(1-z^2)^{q-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2q-1}\frac{z}{(1-z^2)^{q-\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on remarque que l'expression $(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2)^{q-\frac{1}{2}}}$ est un polynôme du degré $2q-1$, on reconnaîtra la vérité de l'égalité suivante, à un polynôme près du degré $2q$,

$$\begin{aligned} E_q = {} & \frac{q-1}{q}(1-x^2-y^2)E_{q-1} \\ & + (1-x^2-y^2)^q\left[\frac{x}{2q}\int_0^y \frac{dy}{(1-x^2-y^2)^q} + \frac{y}{2q}\int_0^x \frac{dx}{(1-x^2-y^2)^q}\right. \\ & \left. + \frac{q-1}{q}\int_0^x\int_0^y \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^q} - \int_0^x\int_0^y \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{q+1}}\right]. \end{aligned}$$

Le facteur entre crochets dans le second membre est une constante, car on reconnaîtra facilement que ses dérivées partielles par rapport à x et à y sont nulles. Le théorème est donc démontré.

Nous avons indiqué antérieurement la manière de calculer les coefficients de ce polynôme. On trouve, en représentant par $A_{2k+1,2h+1}$ le coefficient du terme en $x^{2k+1}y^{2h+1}$ dans ce polynôme,

$$A_{2k+1,2h+1} = M(-1)^{k+h}2^{k+h}\frac{1}{[q-(k+h+1)]!}\,\frac{1}{1.3.5\ldots(2h+1)}\,\frac{1}{1.3.5\ldots(2k+1)},$$

M étant une constante indépendante de h et de k.

D'après une formule de réduction indiquée précédemment, on verra facilement que le terme dont le coefficient est B dans l'intégrale générale du système d'équations aux dérivées partielles peut se mettre sous

la forme

$$B\sqrt{1-x^2}\,P + B\,\frac{1.3.5\ldots(2q-1)}{2.4.6\ldots 2q}\,\frac{(1-x^2-y^2)^q}{2}\log\frac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-x^2}-y},$$

P étant un polynôme du degré $2q-1$, on mettra le terme en C sous une forme analogue.

Développement effectif de la fonction $U_{m,n}$ *au moyen des fonctions* V, *et de la fonction* $V_{m,n}$ *au moyen des fonctions* U.

Je vais faire deux applications simples du développement des fonctions qui résulte de la considération des polynômes $U_{m,n}$, $V_{m,n}$. Je vais calculer effectivement les coefficients des fonctions V dans l'expression qui donne $U_{m,n}$, et les coefficients des fonctions U dans le développement qui donne $V_{m,n}$.

Soit

$$U_{m,n} = \sum A_{\mu,\nu}\,V_{\mu,\nu}.$$

On aura

$$A_{\mu,\nu}\int\!\!\int V_{\mu,\nu}\,U_{\mu,\nu}\,dx\,dy = \int\!\!\int U_{m,n}\,U_{\mu,\nu}\,dx\,dy.$$

On voit immédiatement que $\mu+\nu$ doit être égal à $m+n$, et que μ et m doivent être de même parité pour que $A_{\mu,\nu}$ ne soit pas nul. On peut donc poser $\mu = m-2k$, $\nu = n+2k$, $2k$ pouvant prendre toutes les valeurs entières paires comprises entre $-n$ et $+m$, et l'on aura, en effectuant un calcul facile,

$$A_{m-2k,\,n+2k} = \frac{1}{2^{2m+2n}}\,\frac{(m-k+1)\ldots(2m-2k)}{m!}\,\frac{(n+k+1)\ldots(2n+2k)}{n!}.$$

Soit de même

$$V_{m,n} = \sum A_{\mu,\nu}\,U_{\mu,\nu}.$$

On déterminera $A_{\mu,\nu}$ par l'équation

$$A_{\mu,\nu}\int\!\!\int U_{\mu,\nu}\,V_{\mu,\nu}\,dx\,dy = \int\!\!\int V_{m,n}\,V_{\mu,\nu}\,dx\,dy.$$

Pour la même raison que précédemment, on pourra poser

$$V_{m,n} = \sum A_{m-2k,\, n+2k}\, U_{m-2k,\, n+2k},$$

$2k$ variant entre les mêmes limites que tout à l'heure.

M. Hermite a fait voir que l'on avait

$$\int\int (1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-1}(1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2)^{-1}\, dx\, dy$$
$$= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{1 - aa' - bb'},$$

c'est-à-dire

$$\int\int \left(\sum a^m b^n V_{m,n}\right)\left(\sum a'^{\mu} b'^{\nu} V_{\mu,\nu}\right) dx\, dy$$
$$= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{1 - aa' - bb'}.$$

On conclut de là la valeur de $A_{m-2k,n+2k}$. Le calcul étant très-facile, je vais me borner à énoncer les résultats. On trouve

$$A_{m-2k,n+2k} = (-1)^k (m + n + 1)(m - 2k)!\,(n + 2k)!$$
$$\times \sum_{\alpha=\alpha'}^{\alpha=\alpha''} \frac{1}{(2\alpha + 1)(\alpha + k)!\,(\alpha - k)!\,(m - k - \alpha)!\,(n + k - \alpha)!},$$

α est un nombre entier. Voici comment on prendra les limites α' et α''. Si k est positif, on prendra $\alpha' = k$, et si k est négatif $\alpha'' = -k$. Ainsi α' est toujours égal à la valeur absolue de k. Pour la limite α'', nous considérerons divers cas.

Soit d'abord $m < n$. Si k est positif, on prendra $\alpha'' = -k$; si k est négatif, on prendra, pour α'', $m - k$ ou $n + k$, suivant que la valeur absolue de $2k$ sera moindre ou plus grande que $n - m$.

Soit $m = n$. On prendra $\alpha'' = m - k$, si k est positif, et, dans le cas contraire, $\alpha'' = n + k$.

Soit, en dernier lieu, $m > n$. Si k est négatif, on prendra la valeur $\alpha'' = n + k$, sinon, on prendra pour α'', soit $m - k$, soit $n + k$, suivant que $2k$ sera plus grand ou plus petit que $m - n$.

Définition des fonctions $U_{m,m',m'',\dots}$ à μ variables, et forme analytique remarquable sous laquelle on peut les mettre.

Je passe maintenant à la généralisation des fonctions X_n de Legendre, pour un nombre quelconque μ de variables. Les nouvelles fonctions $U_{m,m',m'',\dots}$ naissent du développement suivant :

$$[(1-ax-by-cz-\dots)^2-(a^2+b^2+c^2+\dots)(x^2+y^2+z^2+\dots-1)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\sum a^m b^{m'} c^{m''}\dots U_{m,m',m'',\dots},$$

où les quantités $a, b, c,\dots$ sont au nombre de μ, ainsi que les variables $x, y, z,\dots$.

Je vais mettre la fonction $U_{m,m',m'',\dots}$ sous la forme suivante :

$$(20)\quad \begin{cases} U_{m,m',m'',\dots} = \dfrac{1}{m!\,m'!\,m''!\dots 2^{m+m'+m''+\dots}} \\ \qquad \times \dfrac{d^{m+m'+m''+\dots}(x^2+y^2+z^2+\dots-1)^{m+m'+m''+\dots}}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\dots}. \end{cases}$$

Pour cela, je me servirai d'une forme particulière de la formule de Lagrange, employée par M. Hermite dans le cas des fonctions $U_{m,n}$ à deux variables.

Soit

$$(21)\qquad \mathfrak{F}(u)=u-F\left(x+\frac{a}{2}u,\ y+\frac{b}{2}u,\ z+\frac{c}{2}u,\dots\right)=0,$$

une équation à une inconnue u. L'une des racines de cette équation se réduit pour $a=0$, $b=0$, $c=0,\dots$ à $F(x, y, z,\dots)$. On aura la formule suivante, où u désigne cette racine,

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\Phi\left(x+\frac{a}{2}u,\ y+\frac{b}{2}u,\ z+\frac{c}{2}u,\dots\right)}{\mathfrak{F}'(u)} \\ \quad =\sum \dfrac{a^m b^{m'} c^{m''}\dots}{m!\,m'!\,m''!\dots 2^{m+m'+m''+\dots}}\ \dfrac{d^{m+m'+m''+\dots}F^{m+m'+m''+\dots}(x,y,z,\dots)\Phi(x,y,z,\dots)}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\dots} \end{cases}$$

Si l'on fait $F(x, y, z,\dots)=x^2+y^2+z^2+\dots-1$, l'équation (21)

deviendra

$$\mathfrak{F}(u) = u - \left(x + \frac{a}{2}u\right)^2 - \left(y + \frac{b}{2}u\right)^2 - \left(z + \frac{c}{2}u\right)^2 \ldots + 1 = 0,$$

ou bien

$$\mathfrak{F}(u) = -\frac{a^2+b^2+c^2+\ldots}{4}u^2 + (1-ax-by-cz-\ldots)u - (x^2+y^2+z^2+\ldots-1) = 0.$$

La racine qu'il faut considérer est

$$u = 2\frac{-(1-ax-by-\ldots)+\sqrt{(1-ax-by-\ldots)^2-(a^2+b^2+\ldots)(x^2+y^2+\ldots-1)}}{-(a^2+b^2+\ldots)}.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{F}'(u) = [(1-ax-by-cz-\ldots)^2-(a^2+b^2+c^2+\ldots)(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)]^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on fait $\Phi(x, y, z, \ldots) = 1$, la formule (22) deviendra

$$[(1-ax-by-cz-\ldots)^2-(a^2+b^2+c^2+\ldots)(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{m!\,m'!\,m''!\ldots 2^{m+m'+m''+\ldots}} \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{m+m'+m''+\ldots}}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots},$$

ce qui démontre l'égalité (20).

Théorème sur une intégrale multiple.

Il est facile de voir qu'on a la relation

$$(23) \qquad \iiint U_{m,m',m'',\ldots}\, U_{n,n',n'',\ldots}\, dx\, dy\, dz \ldots = 0,$$

les variables étant limitées par la condition $x^2+y^2+z^2+\ldots \leqq 1$, quand $m+m'+m''+\ldots$ n'est pas égal à $n+n'+n''+\ldots$.

Je le déduirai de la formule suivante facile à démontrer

$$\iiint F(x, y, z\ldots) \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{m+m'+m''+\ldots}}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots$$
$$= (-1)^{m+m'+m''+\ldots} \iiint \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}F(x, y, z, \ldots)}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{m+m'+m''+\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots.$$

Si l'on fait $F(x, y, z, \ldots) = U_{n,n',n'',\ldots}$, et que la somme $n + n' + n'' + \ldots$ soit inférieure à la somme $m + m' + m'' + \ldots$, le second membre de la relation précédente sera évidemment nul. L'égalité (23) est donc démontrée.

Cherchons la valeur de l'intégrale multiple

$$(24) \qquad \int\int\int U_{m,m',m'',\ldots} U_{n,n',n'',\ldots}\, dx\, dy\, dz, \ldots,$$

quand on a $m + m' + m'' + \ldots = n + n' + n'' + \ldots$.

D'après l'égalité précédente, cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{m!\, m'!\, m''! \ldots} \frac{1}{n!\, n'!\, n''! \ldots} \frac{1}{2^{m+m'+m''+\ldots+n+n'+n''+\ldots}}$$
$$\times \int\int\int (1 - x^2 - y^2 - z^2 \ldots)^{m+m'+m''+\ldots} \frac{d^{m+n+m'+n'+\ldots}(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^{n+n'+n''+\ldots}}{dx^{m+n}\, dy^{m'+n'}\, dz^{m''+n''} \ldots} dx\, dy\, dz \ldots.$$

La différentielle qui entre sous les signes $\int\int\int$ est nulle, si les sommes $m + n$, $m' + n'$, $m'' + n''$,... ne sont pas toutes paires, et dans le cas contraire, elle est égale à

$$\frac{(n + n' + n'' + \ldots)!}{\left(\frac{m+n}{2}\right)! \left(\frac{m'+n'}{2}\right)! \left(\frac{m''+n''}{2}\right)! \ldots} (m + n)!\, (m' + n')!\, (m'' + n'')! \ldots.$$

On est ainsi ramené à calculer l'intégrale

$$(25) \qquad \int\int\int (1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{m+m'+m''+\ldots}\, dx\, dy\, dz \ldots$$

Or on a, en général,

$$(26) \int\int\int f(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)\, dx\, dy\, dz = (\sqrt{\pi})^{\mu} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \int_0^{c^2} f(h)\, h^{\frac{\mu}{2}-1}\, dh,$$

les μ variables dans l'intégrale du premier membre étant limitées par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \leqq c^2.$$

Donc l'intégrale (25) est égale à

$$(\sqrt{\pi})^\mu \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \int_0^1 (1-h)^{m+m'+m''+\dots} h^{\frac{\mu}{2}-1}\, dh = (\sqrt{\pi})^\mu \frac{\Gamma(m+m'+m''+\dots+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots+1\right)}.$$

De quelques autres propriétés des fonctions $U_{m,m',m'',\dots}$.

La forme analytique sous laquelle nous avons mis le polynôme $U_{m,m',m'',\dots}$ montre que ce polynôme est égal à une fonction de x^2, y^2, $z^2,\dots$, multipliée par un certain nombre des quantités $x, y, z,\dots$, nombre égal à celui des quantités $m, m', m'',\dots$, qui sont impaires. Si l'on fait abstraction de ces facteurs $x, y, z,\dots$, il est facile de voir que le polynôme $U_{m,m',m'',\dots}$ reste toujours positif, pour les valeurs des variables dont la somme des carrés est supérieure à 1, et par conséquent, qu'il ne peut s'annuler que pour les valeurs des variables dont la somme des carrés est inférieure à 1. Pour le démontrer, je me servirai de la formule suivante, bien facile à établir :

$$\begin{aligned}
&a^k U_{k,0,0,\dots} + a^{k-1} b\, U_{k-1,1,0,\dots} + a^{k-2} b^2 U_{k-2,2,0,\dots} + \dots \\
&\quad = (ax+by+cz\dots)^k + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \frac{k(k-1)\dots(k-2n+1)}{(2n)!} \\
&\qquad \times (ax+by+cz+\dots)^{k-2n}(a^2+b^2+c^2+\dots)^n(x^2+y^2+z^2+\dots-1)^n + \dots.
\end{aligned}$$

Cette formule montre bien clairement que, tant que

$$x^2+y^2+z^2+\dots-1$$

est supérieure à 0, toutes les quantités $U_{k,0,0}$, $U_{k-1,1,0,\dots}$ sont positives, au moins pour les valeurs positives de $x, y, z,\dots$; il en est évidemment de même, quand quelques-unes des quantités $x, y, z,\dots$ sont négatives, à cause de la forme $x,\dots, z,\dots \Phi(x^2, y^2, z^2,\dots)$ de la fonction $U_{m,m',m'',\dots}$, si toutefois on fait abstraction des facteurs $x, z,\dots$ qui peuvent se trouver, comme multiplicateurs de la fonction Φ.

Si l'on donne à $y, z,\dots$ des valeurs constantes dont la somme des carrés soit supérieure à 1, $U_{m,m',m'',\dots}$ augmentera constamment avec x, à partir de $x=0$; si la somme des carrés de $y, z,\dots$ est inférieure à 1, $U_{m,m',m'',\dots}$ augmentera encore constamment avec x, mais à partir de

$x=\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$. C'est ce que montre immédiatement la formule précédente.

Je vais faire voir maintenant que, si l'on donne des valeurs constantes, dans la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$ à toutes les variables, sauf une, par exemple, aux variables y, z,... de manière que leurs valeurs satisfassent à l'inégalité $x^2+y^2+\ldots<1$, l'équation en x

$$U_{m,m',m'',\ldots}=0$$

aura m racines réelles par rapport à x.

En effet, on a évidemment

$$\frac{d^{m'+m''+\cdots}(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^{m+m'+m''+\cdots}}{dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}=(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^m Z,$$

Z étant une fonction entière de x, y, z,.... Donc

$$U_{m,m',m'',\ldots}=\frac{1}{m!\,m'!\,m''!\ldots 2^{m+m'+m''+\cdots}}\,\frac{d^m(x^2+y^2+z^2+\ldots-1)^m Z}{dx^m},$$

et, sous cette forme, le théorème de Rolle suffit pour montrer que, relativement à x, l'équation $U_{m,m',m'',\ldots}=0$ admet m racines réelles comprises entre $-\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$ et $+\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$. La même démonstration s'applique évidemment à une variable quelconque. On peut aussi, pour démontrer ce résultat, se servir de la belle méthode employée par Legendre, dans ses Exercices de Calcul intégral, pour les fonctions X_n, car la forme analytique de la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$ montre que l'intégrale

$$\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}}^{+\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}} U_{m,m',m'',\ldots}\,\theta(x)\,dx$$

est nulle quand le degré du polynôme $\theta(x)$ est inférieur à m.

Je suppose, par rapport à x, i racines réelles dans l'équation $U_{m,m',m'',\ldots}=0$, i étant moindre que m, et en faisant, pour un instant,

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_i),$$

x_1, x_2, x_3, ..., x_i étant les racines réelles.

Je poserai

$$\theta(x) = f(x),$$

ce qui donne l'égalité

$$\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}}^{+\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}} F(x) f^2(x)\, dx = 0,$$

$F(x)$ étant défini par la relation $U_{m,m',m'',\ldots} = F(x) f(x)$.

On en conclut que le polynôme $F(x)$ change de signe au moins une fois entre $-\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$ et $+\sqrt{1-y^2-z^2-\ldots}$, sans quoi l'intégrale, ayant tous ses élements de même signe, ne pourrait s'évanouir, de sorte qu'on peut ajouter une nouvelle racine réelle aux précédentes, et poursuivre ainsi jusqu'à ce qu'on soit arrivé à la limite du degré de $\theta(x)$; c'est donc par conséquent m racines réelles pour x, et en opérant sur $y, z, \ldots$, on trouverait de même le résultat annoncé.

En opérant, comme nous l'avons fait pour les fonctions $U_{m,n}$ à deux variables, on trouvera un système de μ équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$. Ce système d'équations est le suivant, en posant

$$x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} + z\frac{dU}{dz} + \ldots - (m + m' + m'' + \ldots)U = P,$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} - (m+1)P = 0, \quad \frac{d^2U}{dy^2} - y\frac{dP}{dy} - (m'+1)P = 0, \ldots,$$

ou bien, en effectuant les différentiations,

$$\begin{aligned}(1-x^2)\frac{d^2U}{dx^2} - xy\frac{d^2U}{dx\,dy} - xz\frac{d^2U}{dx\,dz} - \ldots + (m'+m''-2)\frac{dU}{dx}\\ - (m+1)y\frac{dU}{dy} - (m+1)z\frac{dU}{dz} - \ldots + (m+m'+m''+\ldots)(m+1)U = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-y^2)\frac{d^2U}{dy^2} - yx\frac{d^2U}{dy\,dx} - yz\frac{d^2U}{dy\,dz} - \ldots + (m+m''-2)\frac{dU}{dy}\\ - (m'+1)x\frac{dU}{dx} - (m'+1)z\frac{dU}{dz} - \ldots + (m+m'+m''+\ldots)(m'+1)U = 0,\end{aligned}$$

....

Définition des fonctions $V_{m,m',m'',\dots}$ *et étude de l'intégrale*

$$\int\!\!\int\!\!\int U_{m,m',m'',\dots} V_{n,n',n'',\dots}\, dx\, dy\, dz\dots.$$

Les fonctions $V_{m,m',m'',\dots}$ qu'il faut associer aux fonctions $U_{m,m',m'',\dots}$ naissent du développement suivant :

$$(1-2ax-2by-2cz-\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{-\frac{\mu}{2}} = \sum a^m b^{m'} c^{m''}\; V_{m,m',m'',\dots}.$$

On voit immédiatement que la fonction $V_{m,m',m'',\dots}$ est un polynôme du degré $m+m'+m''+\dots$ dans lequel le seul terme de ce degré est un terme en $x^m y^{m'} z^{m''}\dots$. Je vais démontrer que l'intégrale multiple

$$\int\!\!\int\!\!\int U_{m,m',m'',\dots} V_{n,n',n'',\dots}\, dx\, dy\, dz\dots$$

est nulle, si l'on n'a pas en même temps $m=n$, $m'=n'$, $m''=n''$, ..., et je trouverai sa valeur dans le cas contraire.

Pour cela, calculons l'intégrale

$$(27)\quad \int\!\!\int\!\!\int U_{m,m',m'',\dots}(1-2ax-2by-2cz-\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{-\frac{\mu}{2}}\, dx\, dy\, dz.$$

Si l'on y remplace $U_{m,m',m'',\dots}$ par sa valeur, elle deviendra, après une transformation facile,

$$\frac{a^m b^{m'} c^{m''}}{m!\,m'!\,m''!\dots}\cdot\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mu}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots-1\right)$$
$$\times\int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz\dots\frac{(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{m+m'+m''+\dots}}{(1-2ax-2by-2cz-\dots+a^2+b^2+c^2+\dots)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots}}.$$

Par une substitution orthogonale, on tranformera la dernière intégrale en la suivante :

$$B=\int\!\!\int\!\!\int dx\, dy\, dz\dots\frac{(1-x^2-y^2-z^2-\dots)^{m+m'+m''+\dots}}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\dots}},$$

où $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2+\dots}$ avec la condition $x^2+y^2+z^2+\dots\leqq 1$.

Intégrons d'abord par rapport à $y, z, \ldots$; nous aurons, en nous servant de la formule (26),

$$B = (\sqrt{\pi})^{\mu-1} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} dx \int_0^{1-x^2} \frac{(1-x^2-h)^{m+m'+m''+\cdots} h^{\frac{\mu-1}{2}-1} dh}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots}}.$$

Si l'on pose $h = (1-x^2)z$, il vient

$$B = (\sqrt{\pi})^{\mu-1} \frac{\Gamma(m+m'+m''+\ldots+1)}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}+m+m'+m''+\ldots+1\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots-\frac{1}{2}}}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots}} dx.$$

Calculons l'intégrale

$$C = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots-\frac{1}{2}}}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\cdots}} dx.$$

Nous déduirons cette intégrale des résultats obtenus dans le cas d'une ou de deux variables. Le cas d'une variable nous conduira à la détermination de l'intégrale, quand μ est impair; le cas de deux variables à la détermination de l'intégrale, quand μ est pair.

On sait que

$$\int_{-1}^{+1} X_n X_{n'} dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{+1} X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1};$$

donc

$$\int_{-1}^{+1} X_n (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2r^n}{2n+1}.$$

Or l'intégrale définie du premier membre de l'égalité précédente peut s'écrire

$$\frac{1}{n!\,2^n} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} (1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

ou bien, par une transformation facile,

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} r^n \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^n}{(1-2rx+r^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

L'égalité précédente donne donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^n}{(1-2rx+r^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{2}{2n+1} \frac{2.4..6...2n}{1.3.5...(2n-1)}.$$

On voit, d'après cela, qu'on connaît l'intégrale C, dans le cas où μ est impair. Soit $\mu = 2\mu'+1$. L'intégrale (27) sera égale, après réduction, à

$$2^{\mu'+1}\pi^{\mu'} \frac{1}{1.3.5...(2\mu'-1)} \frac{a^m b^{m'} c^{m''}...}{2(\mu'+m+m'+m''+...)+1} \frac{(m+m'+m''+...)!}{m!\,m'!\,m''!...}.$$

Comme elle peut s'écrire

$$\iiint dx\,dy\,dz\,U_{m,m',m'',}\left(\sum a^m b^{m'} c^{m''}...\,V_{m,m',m'',...}\right),$$

on en conclut que l'intégrale

$$\iiint dx\,dy\,dz\,U_{m,m',m'',...}V_{n,n',n'',...},$$

dans laquelle m et n, m' et n', m'' et n'',... ne sont pas égaux en même temps, est nulle, et que, dans le cas contraire, elle est égale à l'expression précédente, divisée par $a^m b^{m'} c^{m''}$.... Il est facile de déduire de ce qui précède la valeur de

$$\iiint dx\,dy\,dz(1-2ax-2by-2cz-...+a^2+b^2+c^2+...)^{-\frac{2\mu'+1}{2}}$$
$$+[(1-a'x-b'y-c'z)^2-(a'^2+b'^2+...)(x^2+y^2+...-1)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette valeur est égale, en effet, à

$$\frac{2^{\mu'+1}\pi^{\mu'}}{1.3.5...(2\mu'-1)}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(aa'+bb'+cc'+...)^n}{2(\mu'+n)+1}.$$

Posant

$$aa'+bb'+cc'+...=\alpha,$$

je suis ramené à faire la somme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\alpha^n}{2(\mu'+n)+1} = \frac{1}{2\mu'+1}+\frac{\alpha}{2\mu'+3}+\frac{\alpha^2}{2\mu'+5}+....$$

Il est très-facile de trouver cette somme. On a, en effet,

$$\log\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} = 2\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{1} + \frac{(\sqrt{\alpha})^3}{3} + \ldots\right] = 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{1} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{5} + \ldots\right);$$

donc

$$\frac{1}{2\mu'+1} + \frac{\alpha}{2\mu'+3} + \frac{\alpha^2}{2\mu'+5} + \ldots = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left(\frac{\alpha^{\mu'}}{2\mu'+1} + \frac{\alpha^{\mu'+1}}{2\mu'+3} + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\log\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} - \frac{1}{1} - \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{5} - \ldots - \frac{\alpha^{\mu'-1}}{2\mu'-1}\right).$$

Il faut remarquer que la recherche que nous venons de faire de l'intégrale précédente suppose que $r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ est plus petit que 1, ainsi que $aa'+bb'+cc'+\ldots.$ La même observation s'applique au cas où μ est pair et égal à $2\mu'$.

Cherchons, dans ce cas, l'intégrale C. Nous nous servirons des résultats obtenus par M. Hermite dans le cas de deux variables, et que nous avons cités au commencement de ce travail. On en tire

$$\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}}\int\int\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{dx^m\,dy^n}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}dx\,dy$$
$$= \frac{\pi a^m b^n}{m+n+1}\,\frac{(m+n)!}{m!\,n!},$$

d'où

$$\int\int\frac{(1-x^2-y^2)^{m+n}}{(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{m+n+1}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{m+n+1}.$$

Si l'on fait une transformation orthogonale, l'égalité précédente devient, en posant $a^2+b^2=r^2$,

$$\int\int\frac{(1-x^2-y^2)^{m+n}}{(1-2rx+r^2)^{m+n+1}}\,dx\,dy = \frac{\pi}{m+n+1}.$$

Intégrons d'abord par rapport à y le premier membre de la relation précédente. Ce premier membre devient, en posant $y^2=(1-x^2)z$,

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+n+1)}{\Gamma\left(m+n+\frac{3}{2}\right)}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{(1-2rx+r^2)^{m+n+1}}\,dx,$$

d'où l'on conclut, quel que soit le nombre entier p, l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^{p-\frac{1}{2}}}{(1-2rx+r^2)^p} = \pi \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(p-\frac{1}{2}\right)}{p!}.$$

Par suite, l'intégrale (27), pour $\mu = 2\mu'$, est égale à

$$\pi^{\mu'} \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{1.2\ldots(\mu'-1)} \frac{(m+m'+m''+\ldots)!}{m!\,m'!\,m''!\ldots} \frac{1}{\mu'+m+m'+m''+\ldots}.$$

Donc, quand μ est pair, l'intégrale

$$\int\int\int \mathrm{U}_{m,m',m'',\ldots} \mathrm{V}_{n,n',n'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots$$

est nulle, si l'on n'a pas en même temps $m=n$, $m'=n'$, $m''=n''$,..., et, dans le cas contraire, on en voit la valeur.

L'intégrale

$$\int\int\int dx\, dy\, dz\ldots (1-2ax-2by-\ldots+a^2+b^2+\ldots)^{-\mu'}$$
$$\times[(1-a'x-b'y-\ldots)^2-(a'^2+b'^2+\ldots)(x^2+y^2+\ldots-1)]^{-\frac{1}{2}}$$

est égale à

$$\pi^{\mu'} \frac{1}{1.2\ldots(\mu'-1)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{\mu'+n},$$

où $\alpha = aa' + bb' + cc' + \ldots$.

La somme précédente peut s'écrire

$$\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left(\frac{\alpha^{\mu'}}{\mu'}+\frac{\alpha^{\mu'+1}}{\mu'+1}+\ldots\right) = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left[-\log(1-\alpha)-\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^2}{2}-\cdots-\frac{\alpha^{\mu'-1}}{\mu'-1}\right].$$

De quelques propriétés des fonctions $\mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots}$.

Les fonctions $\mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots}$ jouissent de cette propriété que l'intégrale multiple

$$\int\int\int \mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots} \mathrm{V}_{n,n',n'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots, \text{ avec la condition } x^2+y^2+z^2+\ldots \leq 1$$

est nulle, quand la somme $m+m'+m''+\ldots$ est différente de la somme $n+n'+n''+\ldots$. C'est ce que je vais d'abord démontrer.

Développons la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$ suivant les fonctions V. Soit

$$U_{m,m',m'',\ldots} = \sum A_{\mu,\mu',\mu'',\ldots} V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}.$$

On déterminera $A_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}$ par l'équation

$$A_{\mu,\mu',\mu'',\ldots} \int\int\int U_{\mu,\mu',\mu'',\ldots} V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots$$
$$= \int\int\int U_{m,m',m'',\ldots} U_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots;$$

d'où l'on voit que $A_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}$ sera nul, si la somme $\mu+\mu'+\mu''+\ldots$ est différente de la somme $m+m'+m''+\ldots$. On conclut de là que $U_{m,m',m'',\ldots}$ s'exprime linéairement par les fonctions $V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}$, telles que $\mu+\mu'+\mu''+\ldots = m+m'+m''+\ldots = k$.

Considérons une fonction linéaire à coefficients arbitraires de toutes les fonctions $U_{m,m',m'',\ldots}$ telles, que la somme $m+m'+m''+\ldots$ soit égale à k, à savoir :

$$\alpha U_{k,0,0} + \beta U_{k-1,1,0} + \ldots.$$

Cette somme s'exprimera par une fonction linéaire des V, dont la somme des indices est égale à k, et qui sont en même nombre que les U qui satisfont à la même condition. Les coefficients des V seront des fonctions linéaires de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, et par conséquent pourront prendre des valeurs quelconques, si l'on donne à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des valeurs convenables. Multiplions la fonction linéaire des U par $V_{h,h',h'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots$, et considérons l'intégrale multiple correspondante, prise entre les limites $x^2+y^2+z^2+\ldots \leq 1$; elle sera nulle, quels que soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, si $h+h'+h''+\ldots$, est différent de k; il en sera de même de l'intégrale multiple correspondante au produit par $V_{h,h',h'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots$ de la fonction linéaire des V; elle sera nulle, quels que soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, et, par suite, quels que soient les coefficients de V; donc chacune des intégrales correspondante à chaque V sera nulle; donc

$$\int\int\int V_{h,h',h'',\ldots} V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}\, dx\, dy\, dz\ldots = 0,$$

si $h+h'+h''+\ldots$ est différent de $\mu+\mu'+\mu''+\ldots$.

Mais si ces deux sommes sont les mêmes, l'intégrale correspondante aux U n'est pas nulle; elle est, par exemple, égale à $p\gamma$, quels que soient α, β, $\gamma, \ldots$; il en est toujours de même de l'autre, et l'on a autant d'équations que d'inconnues pour déterminer les intégrales $\int\int\int V_{h,h',h'',\ldots} V_{\mu,\mu',\mu'',\ldots}\, dx\, dy\, dz \ldots$; mais l'une de ces équations a un second membre p différent de o, tandis que, dans le premier cas, toutes les équations avaient pour second membre o. Donc les intégrales correspondantes aux V, dans ce second cas, ou du moins quelques-unes de ces intégrales, ne sont pas nulles.

Les fonctions $V_{m,m',m'',\ldots}$ ont une relation remarquable avec les dérivées de l'expression

$$(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Représentons, en effet, par $P_{m,m',m'',\ldots}$ l'expression

$$\frac{1}{m!\, m'!\, m''!\ldots} \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}}}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},$$

on aura

$$[1 + (x + a)^2 + (y + b)^2 + (z + c)^2 + \ldots]^{-\frac{\mu}{2}} = \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots P_{m,m',m'',\ldots},$$

ou bien

$$(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots + 2ax + 2by + 2cz + \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}}$$
$$= \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots P_{m,m',m'',\ldots}.$$

Remplaçons, dans cette égalité, a par $a(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)$, b par $b(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)$, c par $c(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)$, et ainsi de suite, il viendra

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} [1 + 2ax + 2by + 2cz + \ldots + (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)]^{-\frac{\mu}{2}} \\ \quad = \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots (1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{m+m'+m''+\ldots+\frac{\mu}{2}} P_{m,m',m'',\ldots}. \end{array}\right.$$

D'un autre côté, on a

$$(1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}} = \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots V_{m,m',m'',\ldots},$$

ou bien

$$(1+2ax+2by+2cz+\ldots+a^2+b^2+c^2+\ldots)^{-\frac{\mu}{2}}$$
$$=\sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots(-1)^{m+m'+m''+\ldots}\mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots}.$$

Remplaçons-y

$$a \text{ par } a\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots},\quad b \text{ par } b\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots},$$
$$c \text{ par } c\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots},$$

et aussi

$$x \text{ par } \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},\quad y \text{ par } \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},$$
$$z \text{ par } \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},\ldots,$$

il viendra

$$(29)\left\{\begin{aligned}&[(1+2ax+2by+2cz+\ldots+(a^2+b^2+c^2+\ldots)(1+x^2+y^2+z^2+\ldots)]^{-\frac{\mu}{2}}\\&=\sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots(-1)^{m+m'+m''+\ldots}(1+x^2+y^2+z^2+\ldots)^{\frac{m+m'+m''+\ldots}{2}}(\mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots}),\end{aligned}\right.$$

en désignant par $(\mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots})$ ce que devient $\mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots}$, quand on y remplace $x, y, z,\ldots$ par $\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}$, $\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}}$, $\frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},\ldots$.

En comparant les relations (28) et (29), on en déduit

$$(\mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots})=(-1)^{m+m'+m''+\ldots}(1+x^2+y^2+z^2+\ldots)^{\frac{m+m'+m''+\mu}{2}}\mathrm{P}_{m,m',m'',\ldots}.$$

Ainsi, en résumé, quand on remplace dans les fonctions $\mathrm{V}_{m,m',m'',\ldots}$ $x, y, z,\ldots$ par

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},\quad \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},\quad \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2+\ldots}},\ldots,$$

on obtient, sauf des facteurs égaux à des puissances de

$$1+x^2+y^2+z^2+\ldots,$$

les dérivées de l'expression

$$(1+x^2+y^2+z^2+\ldots)^{-\frac{\mu}{2}}.$$

Si on donne à $y, z, \ldots$ des valeurs constantes dans l'expression de $P_{m,m',m'',\ldots}$, l'équation $P_{m,m',m'',\ldots} = 0$ admet m racines réelles par rapport à x. Le théorème de Rolle suffit pour l'établir, car on peut écrire

$$P_{m,m',m'',\ldots} = K \frac{d^m (1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2} - m' - m'' - \ldots}}{dx^m} \frac{Y}{},$$

Y étant une fonction entière des variables. Or l'expression

$$(1 + x^2 + y^2 + z^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2} - \mu' - \mu'' - \ldots} Y,$$

s'annulant pour $x = -\infty$ et $x = +\infty$, sa première dérivée par rapport à x admettra une racine intermédiaire. Comme cette première dérivée devient aussi nulle pour $x = -\infty$ et $n = +\infty$, la seconde dérivée admettra deux racines intermédiaires, et ainsi de suite. Même raisonnement pour les autres variables.

En opérant, comme nous l'avons fait pour les fonctions $V_{m,n}$, on trouve un système de μ équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour les fonctions $V_{m,m',m'',\ldots}$. Ce système est le suivant :

$$\begin{aligned}
&(1 - x^2)\frac{d^2V}{dx^2} - xy\frac{d^2V}{dx\,dy} - xz\frac{d^2V}{dx\,dz} - (m' + m'' + \ldots + \mu + 1)\frac{dV}{dx} \\
&\qquad + my\frac{dV}{dy} + mz\frac{dV}{dz} + \ldots + m(m + m' + m'' + \ldots + \mu)V = 0, \\
&(1 - y^2)\frac{d^2V}{dy^2} - yx\frac{d^2V}{dy\,dx} - yz\frac{d^2V}{dy\,dz} - \ldots + m'x\frac{dV}{dx} - (m + + m'' \ldots + \mu + 1)\frac{dV}{dy} \\
&\qquad + m'z\frac{dV}{dz} + \ldots + m'(m + m' + m'' + \ldots + \mu)V = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

qu'on peut écrire de la manière suivante, en posant

$$x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + z\frac{dV}{dz} + (m + m' + m'' + \ldots + \mu)V = P:$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2V}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} + mP = 0, \\
&\frac{d^2V}{dy^2} - y\frac{dP}{dy} + m'P = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si l'on ajoute les équations précédentes, on trouve

$$(1-x^2)\frac{d^2V}{dx^2}+(1-y^2)\frac{d^2V}{dy^2}+\ldots-2xy\frac{d^2V}{dx\,dy}-2xz\frac{d^2V}{dx\,dz}-\ldots$$
$$-(\mu+1)\frac{dV}{dx}-(\mu+1)\frac{dV}{dy}-\ldots$$
$$+(m+m'+m''+\ldots)(m+m'+m''+\ldots+\mu)V=0.$$

Or on trouve la même relation, en ajoutant les équations auxquelles satisfait la fonction $U_{m,m',m'',\ldots}$.

Remarques sur le développement d'une fonction quelconque $F(x, y, z, \ldots)$ *suivant les fonctions* $V_{m,m',m'',\ldots}$

Si l'on pose

$$F(x, y, z, \ldots)=\sum A_{m,m',m'',\ldots}V_{m,m',m'',\ldots},$$

on sait quelle sera l'expression de $A_{m,m',m'',\ldots}$. En se servant d'une transformation déjà employée plusieurs fois, on introduit sous les signes $\int\int$ de la valeur de $A_{m,m',m'',\ldots}$ les puissances d'un facteur $(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)$ plus petit que 1, et qui, dès lors, sont d'autant plus petites que les indices m, m', m'' sont plus grands. En appelant $\rho_{m,m',m'',\ldots}$ le maximum de l'expression $\frac{d^{m+m'+m''+\ldots}F(x, y, z, \ldots)}{dx^m\,dy^{m'}\,dz^{m''}\ldots}$, sous la condition $x^2+y^2+z^2+\ldots\leqq 1$, on a cette limite supérieure fort simple de $A_{m,m',m'',\ldots}$, savoir, dans le cas de $2\mu'+1$ variables :

$$A_{m,m',m'',\ldots}<\frac{\rho_{m,m',m'',\ldots}}{(2\mu'+1)(2\mu'+3)\ldots[2(\mu'+m+m'+m''+\ldots)-1]},$$

et dans le cas de $2\mu'$ variables :

$$A_{m,m',m'',\ldots}<\frac{\rho_{m,m',m'',\ldots}}{\mu'(\mu'+1)\ldots(\mu'+m+m'+m''+\ldots-1)\,2^{m+m'+m''+\ldots}}.$$

Si donc le second membre de la première inégalité et le second membre de la seconde, multiplié par $2^{m+m'+m''\ldots}$, ne dépassent jamais une certaine constante K, les termes du développement de $F(x, y, z, \ldots)$

ne dépasseront pas non plus ceux de la série

$$K\sum V_{m,m',m'',\ldots} \quad \text{ou} \quad K\sum \frac{V_{m,m',m'',\ldots}}{2^{m+m'+m''+\ldots}},$$

représentant la fonction

$$K(1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu}{2}}$$

dans les hypothèses $a = 1$, $b = 1$, $c = 1, \ldots$, ou $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}, \ldots$

Mais un autre genre de considérations permet aussi de se rendre compte de la diminution de $A_{m,m',m'',\ldots}$, quand les indices augmentent. Si l'on développe une fonction $F(x)$ d'une variable x, suivant les fonction X_n, de cette manière $F(x) = \sum A_n X_n$, dans l'expression de A_n se trouve l'intégrale $\int_{-1}^{+1} F(x) X_n \, dx$.

On sait que la fonction X_n reste toujours numériquement moindre que l'unité, lorsque la variable x varie de -1 à $+1$. On sait aussi que cette fonction s'annule n fois dans l'intervalle. Or, au voisinage d'une racine, de part et d'autre, X_n a des valeurs égales et de signes contraires, si l'on néglige des infiniment petits du second ordre; comme $F(x)$ a la même valeur aux infiniment petits près du premier ordre, on voit qu'une racine de X_n introduit dans l'intégrale des éléments qui se détruisent. Or, quand n augmente, le nombre des racines augmentant aussi, il en est de même du nombre des éléments de l'intégrale, qui se détruisent deux à deux. De même dans le développement

$$F(x, y, z, \ldots) = \sum A_{m,m',m'',\ldots} V_{m,m',m'',\ldots},$$

qui donne

$$A_{m,m',m'',\ldots} \int\int\int V_{m,m',m'',\ldots} U_{m,m',m'',\ldots} \, dx \, dy \, dz \ldots$$
$$= \int\int\int F(x, y, z, \ldots) U_{m,m',m'',\ldots} \, dx \, dy \, dz, \ldots,$$

on peut faire sur la dernière intégrale des remarques analogues aux précédentes.

Le maximum de la fonction $U_{m,m',m'',\dots}$ est évidemment fini pour les valeurs des variables satisfaisant à la condition $x^2+y^2+z^2+\dots \leqq 1$; d'ailleurs nous avons vu que y, z,... ayant des valeurs constantes dont la somme des carrés est moindre que 1, $U_{m,m',m'',\dots}$ s'annulait pour m valeurs de x comprises entre

$$-\sqrt{1-y^2-z^2-\dots} \quad \text{et} \quad +\sqrt{1-y^2-z^2-\dots}.$$

Sur quelques fonctions analogues aux fonctions $U_{m,n}$, $V_{m,n}$.

Soit la fonction

$$P_{m,n} = \frac{1}{1.2\dots m.1.2\dots n.2^{m+n}}(x^2+y^2-1)^{-h}\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+h}}{dx^m\,dy^n},$$

h étant un nombre entier quelconque positif.

Cette fonction $P_{m,n}$ est un polynôme du degré $m+n$.

Il est facile de voir que l'intégrale double

$$\int\!\!\int (x^2+y^2-1)^h P_{m,n} P_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

est nulle quand $m+n$ et $\mu+\nu$ sont différents, les variables dans l'intégrale satisfaisant à la condition $x^2+y^2 \leqq 1$. Mais on peut trouver des fonctions $Q_{m,n}$ telles que l'intégrale

$$\int\!\!\int P_{m,n} Q_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

soit nulle, quand on n'a pas en même temps $m=\mu$, $n=\nu$. Ces fonctions $Q_{m,n}$ naîtront du développement suivant :

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1-h}(x^2+y^2-1)^h = \sum a^m b^n Q_{m,n}.$$

Cherchons, en effet, la valeur de l'intégrale

$$\int\!\!\int P_{m,n}(x^2+y^2-1)^h(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1-h}\,dx\,dy.$$

Cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{m!\,n!\,2^{m+n}}\int\int\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n+h}}{dx^m\,dy^n}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1-h}\,dx\,dy,$$

ou bien à

$$\frac{a^m b^n}{m!\,n!}(h+1)(h+2)\ldots(h+m+n)$$
$$\times\int\int(1-x^2-y^2)^{m+n+h}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1-h-m-n}\,dx\,dy,$$

ou enfin à

$$\frac{\pi a^m b^n}{m!\,n!}\frac{(h+1)\ldots(h+m+n)}{m+n+h+1},$$

ce qui démontre la proposition énoncée. On voit de plus que l'on a

$$\int\int P_{m,n}\,Q_{m,n}\,dx\,dy=\frac{\pi}{m!\,n!}\frac{(h+1)(h+2)\ldots(h+m+n)}{m+n+h+1}.$$

On prouvera facilement que l'intégrale

$$\int\int(x^2+y^2-1)^{-h}\,Q_{m,n}\,Q_{\mu,\nu}\,dx\,dy$$

est nulle quand les deux sommes $m+n$ et $\mu+\nu$ sont différentes.

Les fonctions $P_{m,n}$ peuvent être considérées comme provenant du développement d'une certaine expression. On obtiendra immédiatement cette expression par la forme de la formule de Lagrange, que nous avons indiquée antérieurement.

On y fera

$$F(x,y)=x^2+y^2-1,$$
$$\Phi(x,y)=(x^2+y^2-1)^h.$$

Si l'on donne à x une valeur constante plus petite que 1, l'équation $P_{m,n}=0$ en y admet n racines réelles comprises entre $-\sqrt{1-x^2}$ et $+\sqrt{1-x^2}$; il y a une propriété analogue pour l'équation $P_{m,n}=0$ en x, où y a une valeur constante moindre que 1.

On peut remarquer que l'intégrale $\int\int P_{m,n}\,U_{\mu,\nu}\,(x^2+y^2-1)^h\,dx\,dy$

est nulle quand $m+n$ est supérieur à $\mu+\nu$, et que $\int\int P_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est aussi nulle quand $\mu+\nu$ est supérieur à $m+n$.

On peut trouver des fonctions d'un nombre quelconque de variables, analogues à $P_{m,n}$ et $Q_{m,n}$; on voit immédiatement de quelles expressions développées on pourra les déduire.

DEUXIÈME PARTIE.

On connait les deux développements suivants :

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2ax+a^2}=\sum a^n \sin[(n+1)\arccos x],$$

$$\frac{1-ax}{1-2ax+a^2}=\sum a^n \cos(n\arccos x).$$

Jacobi a mis l'expression $\sin[(n+1)\arccos x]$ sous la forme

$$(-1)^n\frac{n+1}{1.3.5\ldots(2n+1)}\frac{d^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

On peut mettre l'expression $\cos(n\arccos x)$ sous une forme analogue; car, si l'on différentie par rapport à x l'équation

$$\sin(n\arccos x)=(-1)^{n-1}\frac{n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}},$$

on en tire

$$\cos(n\arccos x)=(-1)^n\frac{1}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

M. Hermite a fait voir que les fonctions $\mho_{m,n}$, tirées du développement suivant :

$$(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-1}=\sum a^m b^n \mho_{m,n},$$

pouvaient se mettre sous la forme

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{(-1)^{m+n}(m+n+1)}{1.3.5\ldots 2(m+n)+1}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

L'analogie de forme analytique est frappante entre cette fonction $\mho_{m,n}$ et la fonction d'une variable $\sin[(n+1)\arccos x]$. On a

$$\iint \frac{\mho_{m,n}\,\mho_{\mu,\nu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = 0,$$

quand $m+n$ est différent de $\mu+\nu$. Les fonctions que M. Hermite associe à celles-ci sont les fonctions $\vartheta_{m,n}$ provenant du développement

$$(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum a^m b^n \vartheta_{m,n}.$$

L'intégrale $\iint \mho_{m,n}\,\vartheta_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est nulle quand on n'a pas en même temps $m=\mu$, $n=\nu$, et, dans le cas contraire, elle est égale à $\pi\left(1-\frac{1}{2m+2n+3}\right)\frac{(m+n)!}{m!\,n!}$. Je généralise ces résultats pour le cas de μ variables.

Mais M. Hermite n'a pas cherché de fonctions de plusieurs variables analogues à $\cos(n\arccos x)$. En considérant le développement

$$(1-ax-by)[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-1} = \sum a^m b^n U_{m,n},$$

j'ai été conduit à des fonctions $U_{m,n}$ qui peuvent se mettre sous la forme

$$(-1)^{m+n}\frac{1.2\ldots(m+n)}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\,\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

et dont l'analogie avec $\cos(n\arccos x)$ devient ainsi évidente.

Les nouvelles fonctions $V_{m,n}$ que j'associe à celles-là proviennent du développement

$$(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum a^m b^n V_{m,n}.$$

L'intégrale double $\iint U_{m,n}\,V_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est nulle quand on n'a pas à la

fois $m=\mu$, $n=\nu$, et, dans le cas contraire, elle est égale à

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{2\pi}{2m+2n+1}.$$

Je généralise aussi ces résultats pour le cas de μ variables, et je fais voir plusieurs relations entre les fonctions $U_{m,n}$ et $\mathfrak{V}_{m,n}$ complétement analogues aux relations correspondantes qui existent entre

$$\sin[(n+1)\arccos x] \quad \text{et} \quad \cos(n \arccos x).$$

Étude des fonctions $U_{m,n}$.

Voici comment on peut obtenir l'expression de $U_{m,n}$ au moyen de x et de y.

On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1-ax-by}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-ax-by-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2-1}}+\frac{1}{1-ax-by+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2-1}}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-P}+\frac{1}{1-Q}\right)
\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned}
P&=ax+by+\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2-1},\\
Q&=ax+by-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2-1}:
\end{aligned}$$

P et Q sont homogènes et du premier degré en a et b. L'ensemble homogène des termes de degré $m+n$ en a et b sera donc $\frac{1}{2}(P^{m+n}+Q^{m+n})$, et l'on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(P^{m+n}+Q^{m+n})\\
&\quad=(ax+by)^{m+n}\\
&\qquad+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}(ax+by)^{m+n-2}(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)+\ldots.
\end{aligned}\right.$$

Le coefficient de $a^m b^n$, dans cette expression, sera la valeur de $U_{m,n}$; donc

$$U_{m,n} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} x^m y^n + \frac{(m+n)!}{1.2} (x^2+y^2-1)\left[\frac{x^{m-2} y^n}{(m-2)!\,n!} + \frac{x^m y^{n-2}}{m!\,(n-2)!}\right] + \dots$$

Cette expression montre que cette fonction est un polynôme de degré $m+n$ et que ses termes contiennent des puissances de x et de y égales respectivement à $m \pm 2k$, $n \pm 2k'$, k et k' étant des nombres entiers; de sorte que $U_{m,n}$ est, dans les quatre cas suivants

$$\left.\begin{matrix} m \equiv 0, & m \equiv 1, & m \equiv 0, & m \equiv 1 \\ n \equiv 0, & n \equiv 0, & n \equiv 1, & n \equiv 1 \end{matrix}\right\} \pmod{2},$$

de l'une des quatre formes

$$F(x^2, y^2), \quad x F(x^2, y^2), \quad y F(x^2, y^2), \quad xy F(x^2, y^2).$$

Du reste, l'égalité (1), qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &a^{m+n} U_{m+n,0} + a^{m+n-1} b\, U_{m+n-1,1} + \dots \\ &\quad = (ax+by)^{m+n} + \frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2} (ax+by)^{m+n-2}(a^2+b^2)(x^2+y^2-1) + \dots, \end{aligned}$$

montre que, hors du cercle $x^2+y^2-1=0$, et, pour des valeurs positives de x et de y, $U_{m,n}$ ne peut pas s'annuler; donc $F(x^2, y^2)$ est essentiellement positif hors de ce cercle.

Donc la courbe $U_{m,n}=0$, si l'on fait abstraction des facteurs x ou y, est tout entière comprise dans l'intérieur du cercle $x^2+y^2=1$.

Voici les valeurs de $U_{m,n}$ dans les cas les plus simples :

$$\begin{aligned} U_{0,0} &= 1, \\ U_{1,0} &= x, \\ U_{0,1} &= y, \\ U_{2,0} &= 2x^2 + y^2 - 1, \\ U_{0,2} &= 2y^2 + x^2 - 1, \\ U_{1,1} &= 2xy, \\ U_{4,0} &= 8x^4 + 8x^2y^2 + y^4 - 8x^2 - 2y^2 + 1, \\ U_{0,4} &= 8y^4 - 8x^2y^2 + x^4 - 8y^2 - 2x^2 + 1, \\ U_{2,2} &= 8x^4 + 8y^4 + 22x^2y^2 - 10x^2 - 10y^2 + 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_{3,0} &= 3xy^2 + 4x^3 - 3x,\\
U_{1,2} &= 6xy^2 + 3x^3 - 3x,\\
U_{2,1} &= 6x^2y + 3y^3 - 3y,\\
U_{0,3} &= 3yx^2 + 4y^3 - 4y,\\
U_{3,1} &= 16x^3y + 12xy^3 - 12xy,\\
U_{1,3} &= 16xy^3 + 12x^3y - 12xy.
\end{aligned}$$

Pour mettre $U_{m,n}$ sous la forme analytique que j'ai annoncée, je me servirai de la formule de Lagrange modifiée, telle que je l'ai employée dans la première Partie (22).

Faisons

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1, \quad \varphi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}},$$

on aura

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(u) &= u - \left(x + \frac{a}{2}u\right)^2 - \left(y + \frac{b}{2}u\right)^2 + 1\\
&= -\frac{a^2+b^2}{4}u^2 + (1 - ax - by)u - (x^2+y^2-1) = 0.
\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
G &= a^2 + b^2,\\
H &= 1 - ax - by,\\
K &= x^2 + y^2 - 1,
\end{aligned}$$

l'équation précédente devient

$$-\frac{G}{4}u^2 + Hu - K = 0.$$

On en tire

$$u = \frac{-H \pm \sqrt{H^2 - GK}}{-\frac{G}{2}} = 2\,\frac{H \pm \sqrt{H^2-GK}}{G}.$$

La racine qu'il faut prendre est

$$u = 2\,\frac{H - \sqrt{H^2-GK}}{G}.$$

On a

$$\mathfrak{F}'(u) = \sqrt{H^2 - GK}, \quad \varphi\left(x + \frac{a}{2}u, y + \frac{b}{2}u\right) = \frac{1}{\sqrt{u}}.$$

Or

$$\frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{\sqrt{2\dfrac{H-\sqrt{H^2-GK}}{G}}} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{H+\sqrt{GK}}-\sqrt{H-\sqrt{GK}}}.$$

Donc, le premier membre de la formule de Lagrange devient

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{H^2-GK}\left(\sqrt{H+\sqrt{GK}}-\sqrt{H-\sqrt{GK}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{K}}\left[(H-\sqrt{GK})^{-\frac{1}{2}}+(H+\sqrt{GK})^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Si l'on se reporte aux valeurs de P et de Q employées précédemment, on voit que cette expression est égale à

$$\frac{1}{2\sqrt{K}}\left[(1-P)^{-\frac{1}{2}}+(1-Q)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

L'ensemble des termes homogènes de degré $m+n$ en a et b est

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2-1}}\,(P^{m+n}+Q^{m+n})\,\frac{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}{2.4.6\ldots2(m+n)}.$$

Donc

$$\frac{P^{m+n}+Q^{m+n}}{2}$$

$$=\sum\sqrt{x^2+y^2-1}\,\frac{2.4.6\ldots2(m+n)}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{a^m b^n}{m!\,n!\,2^{m+n}}\,\frac{d^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n},$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les termes pour lesquels la somme $(m+n)$ est constante.

Si l'on se rappelle que $\dfrac{P^{m+n}+Q^{m+n}}{2}$ désigne l'ensemble homogène des termes de degré $m+n$ en a et b dans le développement de l'expression

$$(1-ax-by)[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)]^{-1},$$

on en conclura

$$(2)\quad U_{m,n}=(-1)^{m+n}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

On voit que $U_{m,n}$ peut se représenter par $h\dfrac{d^m(x^2+y^2-1)^m X}{dx^m}$, h étant une constante, et X un polynôme en x et y; par conséquent le théorème de Rolle fait voir que la courbe $U_{m,n}=0$ est coupée en m points réels par toute droite parallèle à l'axe des x qui rencontre le cercle $x^2+y^2=1$. De même, toute parallèle à l'axe des y, qui rencontre aussi ce cercle, coupe la courbe en n points réels.

Relations entre les fonctions U et $\mathfrak{V}$.

Je vais maintenant établir diverses relations entre les fonctions U et $\mathfrak{V}$. On a

$$\frac{d\mathfrak{V}_{m-1,n}}{dx}=(-1)^{m+n-1}\frac{(m+n)!}{(m-1)!\,n!}\,\frac{1}{1.3.5\ldots[2(m+n)-1]}\,\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

En comparant cette expression de $\dfrac{d\mathfrak{V}_{m-1,n}}{dx}$ à $U_{m,n}$, on en déduit

$$\frac{d\mathfrak{V}_{m-1,n}}{dx}=-\frac{m}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,U_{m,n}.$$

On aura de même

$$\frac{d\mathfrak{V}_{m,n-1}}{dy}=-\frac{n}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,U_{m,n}.$$

Ces relations sont tout à fait analogues à la relation

$$(3)\qquad \frac{d\sin(n\arc\cos x)}{dx}=-\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arc\cos x).$$

Il ne faut pas s'étonner qu'on compare à $U_{m,n}$, $\mathfrak{V}_{m-1,n}$ et $\mathfrak{V}_{m,n-1}$ et non pas $\mathfrak{V}_{m,n}$, car si l'on considère les deux développements

$$\frac{1-ax}{1-2ax+a^2}=\sum a^n\cos(n\arc\cos x),$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2ax+a^2}=\sum a^n\sin[(n+1)\arc\cos x],$$

c'est le coefficient de a^{n-1} dans le second développement qui contient

$\sin(n \arc\cos x)$, tandis que, dans le premier, c'est le coefficient de a^n qui contient $\cos(n \arc\cos x)$. Mais on a aussi

$$\frac{d\cos(n \arc\cos x)}{dx} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \sin(n \arc\cos x). \tag{4}$$

Cherchons à voir la relation analogue pour nos fonctions de deux variables. Pour cela, je remarque que l'égalité (4) conduit à l'identité suivante :

$$D_x \frac{1-ax}{1-2ax+a^2} = a D_a \frac{a}{1-2ax+a^2}.$$

Réciproquement, voilà une identité qu'on peut établir directement, et, en partant d'elle, on peut en conclure l'égalité (4). Opérons de cette dernière manière dans le cas de deux variables. En d'autres termes, comparons

$$D_x \frac{1-ax-by}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}$$

à

$$a D_a \frac{a}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)}.$$

On verra facilement que l'on a

$$\begin{aligned} D_x & \frac{1-ax-by}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left[a D_a \frac{a\sqrt{1-x^2-y^2}}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)} \right. \\ &\qquad \left. + b^2 D_a \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)} \right], \end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{d\left(\sum a^m b^n U_{m,n}\right)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left[a \frac{d\left(\sum a^{m+1} b^n \mathfrak{V}_{m,n}\right)}{da} + b^2 \frac{d\left(\sum a^m b^n \mathfrak{V}_{m,n}\right)}{da} \right];$$

donc

$$\frac{dU_{m,n}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} [m \mathfrak{V}_{m-1,n} + (m+1) \mathfrak{V}_{m+1,n-2}].$$

On a de même

$$\frac{dU_{m,n}}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}[n\,\mathfrak{V}_{m,n-1} + (n+1)\mathfrak{V}_{m-2,n+1}].$$

L'analogie n'est donc pas complète avec l'égalité (4). Mais, si $n = 0$ ou $n = 1$, alors $\mathfrak{V}_{m+1,n-2}$ est nul, et la première des relations précédentes devient analogue à la relation (4), puisqu'elle donne

$$\frac{dU_{m,n}}{dx} = \frac{m}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathfrak{V}_{m-1,n}.$$

Il en est de même de la seconde, quand $m = 0$ ou $m = 1$. Examinons les deux premiers cas; on traitera de la même façon les deux derniers. Soit d'abord $n = 0$, on a

$$U_{m,0} = -\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{m}\frac{d\mathfrak{V}_{m-1,0}}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{dU_{m,0}}{dx} = \frac{m}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathfrak{V}_{m-1,0},$$

d'où l'on déduit, en multipliant membre à membre,

$$U_{m,0}\frac{dU_{m,0}}{dx} = -\mathfrak{V}_{m-1,0}\frac{d\mathfrak{V}_{m-1,0}}{dx};$$

donc $(U_{m,0})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,0})^2$ est une quantité constante relativement à x, c'est-à-dire une quantité indépendante de x; je vais démontrer que cette somme est égale à $(1-y^2)^m$. On aura alors un théorème analogue à celui qui est exprimé par l'égalité $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$. On a

$$U_{m,0} = (-1)^m \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{1.3.5\ldots(2m-1)} \frac{d^m(1-x^2-y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^m},$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,0} = (-1)^{m-1} \frac{m}{1.3.5\ldots(2m-1)} \frac{d^{m-1}(1-x^2-y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^{m-1}}.$$

Posons $\dfrac{x}{\sqrt{1-y^2}} = x'$, d'où $dx = \sqrt{1-y^2}\,dx'$, il viendra

$$U_{m,0} = (-1)^m \frac{\sqrt{1-x'^2}}{1.3.5\ldots(2m-1)}(1-y^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m(1-x'^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx'^m},$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,0} = (-1)^{m-1} \frac{m}{1.3.5\ldots(2m-1)}(1-y^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{m-1}(1-x'^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx'^m},$$

ou, en posant $x' = \cos\varphi$,

$$U_{m,0} = (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} \cos m\varphi,$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,0} = (1 - y^2)^{\frac{m}{2}} \sin m\varphi;$$

par conséquent

$$(U_{m,0})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,0})^2 = (1 - y^2)^m.$$

Mais, si au lieu de supposer $n = 0$, on suppose $n = 1$, la quantité $(U_{m,1})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,1})^2$ est encore une quantité indépendante de x. Voici comment on peut obtenir l'expression de cette fonction de y. On a, par une transformation facile,

$$U_{m,1} = (-1)^m (m+1) \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1.3.5\ldots(2m-1)}\, y\, \frac{d^m (1 - x^2 - y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^m},$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,1} = (-1)^{m-1} m (m+1) \frac{1}{1.3.5\ldots(2m-1)}\, y\, \frac{d^{m-1} (1 - x^2 - y^2)^{m-\frac{1}{2}}}{dx^m};$$

par conséquent,

$$U_{m,1} = (m+1)\, y\, U_{m,0},$$

$$\mathfrak{V}_{m-1,1} = (m+1)\, y\, \mathfrak{V}_{m-1,0},$$

donc

$$(U_{m,1})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,1})^2 = (m+1)^2 y^2 [(U_{m,0})^2 + (\mathfrak{V}_{m-1,0})^2] = (m+1)^2 y^2 (1 - y^2)^m.$$

On peut remarquer aussi les formules suivantes. Si l'on fait $y = \cos\psi$, $x = \sin\psi \cos\varphi$, on a

$$U_{m,0} = \cos m\varphi \sin^m\psi,$$

$$U_{m,1} = (m+1) \cos\psi \sin^m\psi \cos m\varphi.$$

Enfin je donnerai encore la relation déduite de l'équation

$$\sum a^m b^n U_{m,n} = \frac{1 - ax - by}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \sum a^m b^n \mathfrak{V}_{m,n}.$$

Cette relation est

$$U_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} (\mathfrak{V}_{m,n} - x\, \mathfrak{V}_{m-1,n} - y\, \mathfrak{V}_{m,n-1}).$$

Sur quelques intégrales doubles.

On a

$$\int\int F(x,y)\frac{d^{m+n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}\,dx\,dy$$
$$=(-1)^{m+n}\int\int\frac{d^{m+n}F(x,y)}{dx^m\,dy^n}(1-x^2-y^2)^{m+n-\frac{1}{2}}\,dx\,dy,$$

les variables étant limitées dans les deux intégrales par la condition $x^2+y^2\leqq 1$.

Si l'on fait $F(x,y)=U_{\mu,\nu}$, et que $\mu+\nu$ soit inférieur à $m+n$, l'intégrale précédente sera nulle; dont l'intégrale

$$\int\int\frac{U_{m,n}\,U_{\mu,\nu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy,$$

les variables étant limitées par la condition précédente, est nulle quand les deux sommes $m+n$ et $\mu+\nu$ sont différentes. Cette propriété est l'analogue de celle qui est exprimée par la formule

$$\int_0^{\pi}\cos m\varphi\cos m'\varphi\,d\varphi=0$$

quand les nombres entiers m et m' sont différents; car si l'on fait dans cette dernière formule $\cos\varphi=x$, elle devient

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\cos(m\arccos x)\cos(m'\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=0.$$

Nous allons voir aussi la formule analogue à la suivante

$$\int_0^{\pi}\cos m\varphi\sin n\varphi\sin\varphi\,d\varphi=0,$$

si le nombre entier m est différent de $n-1$ et de $n+1$. En posant $\cos\varphi=x$, cette formule devient

$$\int_{-1}^{+1}\cos(m\arccos x)\sin(n\arccos x)\,dx=0.$$

Si, dans l'égalité

$$\int\int \mho_{m,n} F(x,y)\,dx\,dy = K(-1)^{m+n}\int\int (1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+n}F(x,y)}{dx^m\,dy^n}\,dx\,dy,$$

où K est une constante, on fait $F(x,y) = U_{\mu,\nu}$, il vient

$$\int\int \mho_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy = K(-1)^{m+n}\int\int (1-x^2-y^2)^{m+n+\frac{1}{2}} \frac{d^{m+n}U_{\mu,\nu}}{dx^m\,dy^n}\,dx\,dy.$$

Donc, si l'on a $\mu+\nu < m+n$, on a aussi

$$\int\int \mho_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy = 0.$$

Mais supposons maintenant que $\mu+\nu$ soit supérieur à $m+n$. On a

$$\begin{aligned}\int\int & F(x,y)\,U_{\mu,\nu}\,dx\,dy \\ &= K'(-1)^{m+n}\int\int (1-x^2-y^2)^{\mu+\nu-\frac{1}{2}} \frac{d^{\mu+\nu}\sqrt{1-x^2-y^2}\,F(x,y)}{dx^\mu\,dy^\nu}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Faisant $F(x,y) = \mho_{m,n}$, il vient

$$\begin{aligned}\int\int & \mho_{m,n}\,U_{\mu,\nu}\,dx\,dy \\ &= K'(-1)^{m+n}\int\int (1-x^2-y^2)^{\mu+\nu-\frac{1}{2}} \frac{d^{\mu+\nu}\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mho_{m,n}}{dx^\mu\,dy^\nu}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

$\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mho_{m,n}$ est un polynôme du degré $m+n+2$; donc si $m+n+2$ est plus petit que $\mu+\nu$, l'intégrale $\int\int \mho_{m,n} U_{\mu,\nu}\,dx\,dy$ est nulle.

On reconnaît ainsi l'analogie que nous avions annoncée. Cependant, pour qu'elle soit complète, il faut que l'intégrale précédente soit aussi nulle quand $\mu+\nu$ est égal à $m+n+1$; or $\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mho_{m,n}$ est un polynôme dans lequel les exposants de x et de y varient de deux unités; il en sera de même de sa dérivée d'ordre $m+n+1$. Cette dérivée, du premier degré, contiendra donc x et y à la première puissance, mais n'aura pas de terme constant. On voit alors qu'en associant à certaines valeurs de x et de y, les mêmes valeurs prises en signe contraire, on formera deux éléments de l'intégrale de signes contraires, mais égaux en valeur absolue; donc, en définitive, l'intégrale est nulle. Ainsi l'analogie est complète.

Sur l'intégrale double $\iint U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$ pour $x^2 + y^2 \leqq 1$.

Les fonctions $V_{m,n}$ proviennent, comme nous l'avons déjà dit, du développement suivant

$$(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum a^m b^n V_{m,n}.$$

On voit clairement que, sauf le facteur $(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$, $V_{m,n}$ sera un polynôme du degré $m + n$, dont le seul terme de ce degré sera le terme en $x^m y^n$, et dans lequel les exposants de x, ainsi que ceux de y, seront tous de même parité. Voici les valeurs de $V_{m,n}$ dans les cas les plus simples.

En posant $(1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} = \rho$, on aura

$$V_{0,0} = \rho, \qquad V_{3,0} = \frac{1}{2}\rho(5x^3 - 3x),$$

$$V_{1,0} = \rho x, \qquad V_{1,2} = \frac{3}{2}\rho(5xy^2 - x),$$

$$V_{0,1} = \rho y, \qquad V_{2,1} = \frac{3}{2}\rho(5x^2 y - y),$$

$$V_{2,0} = \frac{1}{2}\rho(3x^2 - 1), \qquad V_{0,3} = \frac{1}{2}\rho(5y^3 - 3y),$$

$$V_{0,2} = \frac{1}{2}\rho(3y^2 - 1), \qquad V_{2,2} = \frac{3}{4}\rho(35x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 1),$$

$$V_{4,0} = \frac{1}{8}\rho(35x^4 - 30x^2 + 8), \qquad V_{3,1} = \frac{5}{2}\rho(7x^3y - 3xy),$$

$$V_{0,4} = \frac{1}{8}\rho(35y^4 - 30y^2 + 8), \qquad V_{1,3} = \frac{5}{2}\rho(7xy^3 - 3xy).$$

$$V_{1,1} = 3\rho xy,$$

Je vais faire voir que l'intégrale double $\iint U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$, dans laquelle les variables sont limitées par la condition $x^2 + y^2 \leqq 1$, est nulle, à moins que l'on n'ait $m = \mu$, $n = \nu$, auquel cas je donnerai la valeur de l'intégrale.

Pour cela, cherchons l'intégrale

$$A = \int\int (1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - ax - by)$$
$$\times [(1 - ax - by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)]^{-1} \, dx \, dy$$

entre les mêmes limites que précédemment.

Faisons

$$a^2 + b^2 = r^2, \quad a'^2 + b'^2 = r'^2,$$
$$x = \frac{a'\xi + b'\eta}{r'}, \quad y = \frac{b'\xi - a'\eta}{r'},$$
$$\frac{aa' + bb'}{rr'} = \cos\theta, \quad \frac{ab' - ba'}{rr'} = \sin\theta.$$

Alors

$$dx\,dy = d\xi\,d\eta, \quad x^2 + y^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad a'x + b'y = r'\xi,$$
$$ax + by = r(\xi\cos\theta + \eta\sin\theta),$$

et l'on a

$$A = \int\int d\xi d\eta (1 - 2r'\xi + r'^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - \xi^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta)$$
$$\times [(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta)^2 - r^2(\xi^2 + \eta^2 - 1)]^{-1},$$

les variables nouvelles ξ et η étant également limitées par la condition $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$. On est conduit à intégrer d'abord par rapport à η, c'est-à-dire à l'intégrale

$$B = \int_{-\sqrt{1-\xi^2}}^{+\sqrt{1-\xi^2}} d\eta \frac{1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta}{(1 - \xi^2 - \eta^2)^{\frac{1}{2}} [(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\eta)^2 - r^2(\xi^2 + \eta^2 - 1)]}.$$

Changeons de variables et posons $\eta = \sqrt{1 - \xi^2}\cos\varphi$, il vient

$$B = \int_0^\pi \sqrt{1 - \xi^2}\sin\varphi \, d\varphi$$
$$\times \frac{1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\sqrt{1 - \xi^2}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \xi^2}\sin\varphi\,[(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\sqrt{1 - \xi^2}\cos\varphi)^2 + r^2(1 - \xi^2)\sin^2\varphi]},$$

ou bien

$$B = \int_0^\pi d\varphi \frac{L - M\cos\varphi}{(L - M\cos\varphi)^2 + N^2\sin^2\varphi},$$

si l'on pose

$$1 - r\cos\theta\xi = \mathrm{L},$$
$$r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2} = \mathrm{M},$$
$$r\sqrt{1-\xi^2} = \mathrm{N}.$$

Mais l'intégrale précédente peut se transformer en la somme de deux autres, savoir :

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi - i\mathrm{N}\sin\varphi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi + i\mathrm{N}\sin\varphi}.$$

La seconde de ces intégrales est égale à

$$\frac{1}{2}\int_0^{-\pi}\frac{-d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi - i\mathrm{N}\sin\varphi} \quad \text{ou bien} \quad \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\frac{d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi - i\mathrm{N}\sin\varphi},$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\varphi}{\mathrm{L} - \mathrm{M}\cos\varphi - i\mathrm{N}\sin\varphi}.$$

Soit

$$e^{\varphi i} = z, \quad \text{d'où} \quad zi\,\varphi = dz, \quad \cos\varphi = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad i\sin\varphi = \frac{z - \frac{1}{z}}{2}.$$

On est conduit, pour avoir B, à intégrer le long du cercle $e^{\varphi i} = z$, ou $x^2 + y^2 = 1$, la différentielle

$$\frac{dz}{2iz\left(\mathrm{L} - \mathrm{M}\dfrac{z + \frac{1}{z}}{2} - \mathrm{N}\dfrac{z - \frac{1}{z}}{2}\right)} = \frac{dz}{i[2\mathrm{L}z - \mathrm{M}(z^2+1) - \mathrm{N}(z^2-1)]}.$$

Le résultat est égal à 2π, multiplié par le résidu de

$$\frac{1}{2\mathrm{L}z - \mathrm{M}(z^2+1) - \mathrm{N}(z^2-1)},$$

dans l'intérieur du cercle $z = e^{\varphi i}$. Si je fais dans le dénominateur de l'expression précédente, successivement $z = -1$ et $z = +1$, j'obtiens

les deux résultats suivants :

$$-2(L+M), \quad 2(L-M).$$

Dans l'hypothèse de $r<1$, que je suppose, la première de ces deux quantités est toujours négative, la seconde toujours positive, quand ξ varie de -1 à $+1$. Nous en concluons que l'équation

$$2Lz - M(z^2+1) - N(z^2-1) = 0$$

a deux racines réelles, dont l'une est comprise entre -1 et $+1$. Si l'on résout cette équation, on a $z = \dfrac{L \pm \sqrt{L^2+N^2-M^2}}{M+N}$, L et $M+N$ étant positifs, c'est la racine $z = \dfrac{L - \sqrt{L^2+N^2-M^2}}{M+N}$ qui est comprise entre -1 et $+1$.

Donc le résidu cherché est égal à la valeur de P tirée de l'identité

$$\begin{aligned}&\frac{1}{-(M+N)z^2+2Lz-(M-N)}\\ &\quad = \frac{P}{z - \dfrac{L-\sqrt{L^2+N^2-M^2}}{M+N}} - \frac{P}{z - \dfrac{L+\sqrt{L^2+N^2-M^2}}{M+N}},\end{aligned}$$

d'où

$$P = \frac{1}{2\sqrt{L^2+N^2-M^2}}.$$

Ainsi, l'intégrale B est égale à

$$\frac{\pi}{\sqrt{L^2+N^2-M^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-2r\cos\theta\,\xi + r^2\cos^2\theta}},$$

et l'on a

$$A = \pi \int_{-1}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\,\xi+r^2\cos^2\theta}}.$$

On peut maintenant calculer cette intégrale par les procédés ordinaires.

Mais on peut l'obtenir facilement en se servant des propositions connues concernant les fonctions X_n. Remplaçons ξ par x dans l'intégrale

précédente : elle pourra s'écrire

$$A = \pi \int_{-1}^{+1} \left(\sum r'^n X_n\right)\left(\sum r^n \cos^n\theta\, X_n\right) dx,$$

d'où

$$A = 2\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(rr'\cos\theta)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{rr'\cos\theta}} \log \frac{1+\sqrt{rr'\cos\theta}}{1-\sqrt{rr'\cos\theta}},$$

ou bien

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{aa'+bb'}} \log \frac{1+\sqrt{aa'+bb'}}{1-\sqrt{aa'+bb'}},$$

si l'on remplace $rr'\cos\theta$ par sa valeur $aa'+bb'$. Il faut remarquer que la recherche de l'intégrale simple précédente, telle que nous l'avons faite, suppose que r' et $r\cos\theta$ soient moindres que l'unité. Comme il nous avait déjà fallu auparavant supposer r moindre que l'unité, on voit que la valeur précédente de A suppose, en définitive, r et r' plus petits que 1. Cette valeur de A ne change pas, quand on y remplace a et a' par at et $\frac{a'}{t}$, et b et b' par bu et $\frac{b'}{u}$. Donc l'intégrale

$$\int\int dx\, dy \left(\sum a^m b^n t^m u^n U_{m,n}\right)\left(\sum a'^\mu b'^\nu t^{-\mu} u^{-\nu} V_{\mu,\nu}\right)$$

est indépendante de t et de u, quels que soient a, b, a', b', pourvu que l'on ait $a^2+b^2<1$ et $a'^2+b'^2<1$. On conclut de là que l'intégrale $\int\int U_{m,n} V_{\mu,\nu}\, dx\, dy$ est nulle, si l'on n'a pas à la fois $m=\mu$, $n=\nu$. Si ces conditions sont réalisées, l'intégrale est égale au coefficient de $(aa')^m (bb')^n$ dans l'expression de A développé. On voit immédiatement que ce coefficient est égal à

$$\frac{2\pi}{2m+2n+1} \cdot \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

De quelques propriétés des fonctions $V_{m,n}$.

Si l'on cherche à développer la fonction $\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ au moyen des fonctions $V_{\mu,\nu}$, les coefficients $A_{\mu,\nu}$ du développement

$$\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \sum A_{\mu,\nu} V_{\mu,\nu}$$

se détermineront par l'équation

$$A_{\mu,\nu} \frac{2\pi}{2\mu+2\nu+1} \frac{(\mu+\nu)!}{\mu!\,\nu!} = \int\int \frac{U_{m,n} U_{\mu,\nu}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, dx\, dy,$$

et, d'après ce qu'on a démontré plus haut, on voit que $A_{\mu,\nu}$ sera nul, si $\mu+\nu$ est différent de $m+n$. Donc la fonction $\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ s'exprimera linéairement au moyen des fonctions $V_{\mu,\nu}$, telles que $\mu+\nu = m+n$.

Une fonction linéaire quelconqne des fonctions $\frac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, telles que $m+n=k$, à savoir :

$$\alpha \frac{U_{k,0}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \beta \frac{U_{k-1,1}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \ldots,$$

s'exprimera linéairement au moyen des fonctions $V_{\mu,\nu}$, telles que $\mu+\nu=k$. Si l'on multiplie la première fonction linéaire par $\sqrt{1-x^2-y^2}\, V_{h,h'}\, dx\, dy$, et que l'on intègre, on voit que, si $h+h'$ est différent de K, l'intégrale sera nulle ; d'où l'on conclut que l'intégrale

$$\int\int dx\, dy \sqrt{1-x^2-y^2}\, V_{m,n} V_{\mu,\nu}$$

est nulle, si $m+n$ est différent de $\mu+\nu$.

On pourra voir facilement qu'on peut déduire les fonctions $V_{m,n}$ des fonctions $U_{m,n}$ par la résolution de systèmes d'équations du premier degré, de la même manière qu'on l'a fait, dans la première Partie, pour déduire les fonctions $V_{\mu,\nu}$ des fonctions $U_{\mu,\nu}$.

Si l'on substitue dans la fonction $V_{m,n}$, à la place de x, $\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, et, à la place de y, $\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, elle devient

$$\frac{(-1)^{m+n}}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}(1+x^2+y^2)^{\frac{m+n}{2}+1}\frac{d^{m+n}(1+x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^m\,dy^n}.$$

Systèmes d'équations aux dérivées partielles pour les fonctions $\mathfrak{V}_{m,n}$, $\mathfrak{P}_{m,n}$, $U_{m,n}$, $V_{m,n}$.

La fonction $\mathfrak{V}_{m,n}$ satisfait aux deux équations linéaires suivantes aux dérivées partielles

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 U}{dx^2} - x\dfrac{dP}{dx} - (m+1)P = 0,\\[2ex] \dfrac{d^2 U}{dy^2} - y\dfrac{dP}{dy} - (n+1)P = 0,\end{cases}$$

où

$$P = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n+1)U,$$

et l'on reconnaît ainsi leur analogie avec l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + (n+1)^2 y = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction $y = \sin[(n+1)\arccos x]$, et qui peut s'écrire

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{d\left[x\dfrac{dy}{dx} - (n+1)y\right]}{dx} - (n+1)\left(x\frac{dy}{dx} - (n+1)y\right) = 0.$$

La fonction $\mathfrak{P}_{m,n}$ satisfait aux deux équations suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 V}{dx^2} - x\dfrac{dP}{dx} + mP = 0,\\[2ex] \dfrac{d^2 V}{dy^2} - y\dfrac{dP}{dy} + nP = 0,\end{cases}$$

où

$$P = x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+3)V.$$

Pour la fonction $U_{m,n}$, ou plutôt la fonction $\dfrac{U_{m,n}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, je donnerai les équations

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2U}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} - (m+1)P = 0,\\ &\frac{d^2U}{dy^2} - y\frac{dP}{dy} - (n+1)P = 0,\end{aligned}\right.$$

où

$$P = x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} - (m+n-1)U = 0,$$

et l'on reconnait ainsi leur analogie avec l'équation

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction $y = \cos(n\arccos x)$, et qui peut s'écrire

$$\frac{d^2\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} - (n+1)P,$$

en posant

$$P = x\frac{d\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}}{dx} - (n-1)\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Enfin la fonction $V_{m,n}$, ou plutôt $V_{m,n}\sqrt{1-x^2-y^2}$, satisfait au système

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2V}{dx^2} - x\frac{dP}{dx} + mP = 0,\\ &\frac{d^2V}{dx^2} - y\frac{dP}{dy} + nP = 0,\end{aligned}\right.$$

où

$$P = x\frac{dV}{dx} + y\frac{dV}{dy} + (m+n+1)V.$$

Pour cela, considérons l'intégrale multiple

$$A = \int\int\int dx\,dy\,dz\ldots \mathfrak{V}_{m,m',m'',\ldots}$$
$$\times(1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu+1}{2}}.$$

Par des transformations analogues à celles que nous avons faites dans la première Partie, on mettra cette intégrale sous la forme

$$A = (\sqrt{\pi})^{\mu-1} \frac{(m + m' + m'' + \ldots + 1)!}{m!\, m'!\, m''!\ldots} \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{1.3.5\ldots(2m + 2m' + 2m'' + \ldots + 1)}$$
$$\times(\mu + 1)(\mu + 3)\ldots[\mu + 2(m + m' + m'' + \ldots) - 1] \frac{\Gamma\left(m + m' + m'' + \ldots + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2} + m + m' + m'' + \ldots + 1\right)} B,$$

où

$$B = \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - x^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\ldots}}{(1 - 2rx + r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\ldots+\frac{1}{2}}};$$

r est égal à $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$.

Je supposerai d'abord le cas de μ impair, soit $\mu = 2\mu' + 1$.

En se servant des résultats obtenus dans la première Partie pour la recherche d'une intégrale analogue, on trouve

$$B = \frac{\pi}{2^{\mu'+m+m'+m''+\ldots+1}} \frac{1.3.5\ldots[2(\mu' + m + m' + m'' + \ldots) + 1]}{(\mu' + m + m' + m'' + \ldots + 1)!},$$

et

$$A = \frac{\pi^{\mu'+1}}{2} \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{\mu'!} \frac{(m + m' + m'' + \ldots + 1)!}{m!\, m'!\, m''!\ldots} \frac{1}{\mu' + m + m' + m'' + \ldots + 1}.$$

La proposition est démontrée.

Concluons de ce qui précède la valeur de l'intégrale d'ordre $2\mu' + 1$

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\ldots(1 - 2ax - 2by - \ldots + a^2 + b^2 + \ldots)^{-(\mu'+1)}(1 - x^2 - y^2 - \ldots)^{\frac{1}{2}}$$
$$\times[(1 - a'x - b'y - \ldots)^2 - (a'^2 + b'^2 + \ldots)(x^2 + y^2 + \ldots - 1)]^{-1}.$$

Si l'on pose $aa' + bb' + cc' + \ldots = \alpha$, cette intégrale est égale à

$$\frac{\pi^{\mu'+1}}{2\mu'!}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(n+1)\alpha^n}{\mu'+n+1} = \frac{\pi^{\mu'+1}}{2\mu'!}\,\frac{d\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{\alpha^n}{\mu'+n}}{d\alpha};$$

mais

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\alpha^n}{\mu'+n} = \frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left[-\log(1-\alpha) - \frac{\alpha}{1} - \ldots - \frac{\alpha^{\mu'-1}}{\mu'-1}\right];$$

donc

$$\frac{d\sum\limits_{n=0}^{n=\infty}\dfrac{\alpha^n}{\mu'+n}}{d\alpha} = \frac{\mu'}{\alpha^{\mu'+1}}\left[\log(1-\alpha) + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{2} + \ldots + \frac{\alpha^{\mu'}}{\mu'}\right] + \frac{1}{1-\alpha}.$$

Supposons μ pair et égal à $2\mu'$. On trouvera

$$\begin{aligned} A = \pi^{\mu'}\,&\frac{2^{\mu'}}{1.3.5\ldots(2\mu'-1)}\,\frac{(m+m'+m''+\ldots+1)!\ldots}{m!\,m'!\,m''!\ldots} \\ &\times\frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots}{2(\mu'+m+m'+m''+\ldots)+1}.\end{aligned}$$

En posant $aa' + bb' + cc' + \ldots = \alpha$, on trouvera que l'intégrale d'ordre $2\mu'$

$$\begin{aligned}\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\ldots(1-2ax-2by-\ldots+a^2+b^2+\ldots)^{-\left(\mu'+\frac{1}{2}\right)}(1-x^2-y^2-\ldots)^{\frac{1}{2}}\\ \times[(1-a'x-b'y-\ldots)^2-(a'^2+b'^2+\ldots)(x^2+y^2+\ldots-1)]^{-1},\end{aligned}$$

est égale à

$$\begin{aligned}\frac{(2\pi)^{\mu'}}{1.3.5\ldots(2\mu'-1)}\,\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\Bigg[\frac{1}{2(1-\alpha)} + \frac{\mu'-1}{1} + \frac{(\mu'-2)\alpha}{3} + \frac{(\mu'-3)\alpha^2}{5} + \ldots\\ + \frac{\alpha^{\mu'-2}}{2\mu'-3} - \frac{2\mu'-1}{4\sqrt{\alpha}}\log\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}\Bigg].\end{aligned}$$

On verra facilement que la quantité

$$\int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz\ldots\,\mathfrak{V}_{m,m',m'',\ldots}\,\mathfrak{V}_{n,n',n'',\ldots}\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\ldots}$$

est nulle, si les sommes $m + m' + m'' + \ldots$ et $n + n' + n'' + \ldots$ sont différentes.

Enfin, j'indiquerai encore des fonctions analogues aux fonctions $\mathfrak{V}_{m,m',m'',\ldots}$ et $\mathfrak{P}_{n,n',n'',\ldots}$.

Soit

$$\mathfrak{P}_{m,m',m'',\ldots} = K_{m,m',m'',\ldots}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{-h} \times \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{m+m'+m''+\ldots+h+\frac{1}{2}}}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},$$

où h est un nombre entier, et $K_{m,m',m'',\ldots}$ une constante. On aura, si les deux sommes $m + m' + m'' + \ldots$ et $n + n' + n'' + \ldots$ sont différentes,

$$\int\int\int dx\, dy\, dz\ldots(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{h-\frac{1}{2}}\, \mathfrak{P}_{m,m',m'',\ldots}\, \mathfrak{P}_{n,n',n'',\ldots} = 0.$$

Considérant le développement

$$(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^h(1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu+1}{2}-h}$$
$$= \sum a^m b^{m'} c^{m''}\, \mathfrak{Q}_{m,m',m'',\ldots},$$

on aura des fonctions $\mathfrak{Q}_{m,m',m'',\ldots}$ telles, que l'intégrale

$$\int\int\int dx\, dy\, dz\ldots\, \mathfrak{P}_{m,m',m'',\ldots}\, \mathfrak{Q}_{n,n',n'',\ldots}$$

sera nulle, si l'on n'a pas simultanément $m = n$, $m' = n'$, $m'' = n''$, ... et que l'intégrale

$$\int\int\int dx\, dy\, dz\ldots(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{-\left(h-\frac{1}{2}\right)}\, \mathfrak{Q}_{m,m',m'',\ldots}\, \mathfrak{Q}_{n,n',n'',\ldots}$$

sera aussi nulle, si l'on a $m + m' + m'' + \ldots \lessgtr n + n' + n'' + \ldots$.

Généralisation des fonctions $U_{m,n}$, $V_{m,n}$.

Considérons le développement

$$(1 - ax - by - cz - \ldots)[(1 - ax - by - cz - \ldots)^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)(x^2 + y^2 + z^2 + \ldots - 1)]^{-1}$$
$$= \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots U_{m,m',m'',\ldots}.$$

On trouvera facilement, au moyen de la formule de Lagrange, cette

expression de $U_{m,m',m'',}$

$$U_{m,m',m'',} = (-1)^{m+m'+m''+} \frac{1.2.3\ldots(m+m'+m''+\ldots)}{1.2\ldots m.1.2\ldots m'.1.2\ldots m''\ldots}$$
$$\times \frac{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\ldots}}{1.3.5\ldots(2m+2m'+2m''+\ldots-1)}$$
$$\times \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)^{m+m'+m''+\ldots-\frac{1}{2}}}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},$$

et on en conclura

$$\iiint dx\, dy\, dz \ldots \frac{U_{m,m',m'',}\, U_{n,n',n'',}}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\ldots}} = 0,$$

lorsque $m + m' + m'' + \ldots$ est différent de $n + n' + n'' + \ldots$.

Les fonctions $V_{m,m',m'',\ldots}$, que nous allons associer aux fonctions $U_{m,m',m'',}$, naîtront du développement suivant :

$$(1-x^2-y^2-z^2-\ldots)^{-\frac{1}{2}}(1-2ax-2by-2zc-\ldots+a^2+b^2+c^2+\ldots)^{-\frac{\mu-1}{2}}$$
$$= \sum a^m b^{m'} c^{m''}\ldots V_{m,m',m'',}.$$

Nous allons faire voir que l'intégrale

$$\iiint U_{m,m',m'',}\; V_{n,n',n'',}\; dx\, dy\, dz\ldots$$

est toujours nulle, excepté quand on a $m = n$, $m' = n'$, $m'' = n''$, auquel cas nous donnerons sa valeur. Pour cela, je calculerai l'intégrale suivante :

$$A = \iiint dx\, dy\, dz \ldots U_{m,m',m'',}\; (1-x^2-y^2-z^2-\ldots)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times (1-2ax-2by-2cz\ldots+a^2+b^2+c^2+\ldots)^{-\frac{\mu-1}{2}}.$$

On trouvera facilement

$$A = \frac{(m+m'+m''+\ldots)!}{m!\,m'!\,m''!\ldots} \frac{a^m b^{m'} c^{m''}\ldots(\sqrt{\pi})^{\mu-1}}{1.3.5\ldots(2m+2m'+2m''+\ldots-1)}$$
$$\times \frac{(\mu-1)(\mu+1)\ldots[\mu+2(m+m'+m''+\ldots)-3]\,\Gamma\left(m+m'+m''+\ldots+\frac{1}{2}\right)B}{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\ldots\right)}$$

où

$$B=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\ldots-1}}{(1-2rx+r^2)^{\frac{\mu}{2}+m+m'+m''+\ldots-\frac{1}{2}}}\,dx,$$

r étant égal à $\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots}$.

Je supposerai d'abord μ impair et égal à $2\mu'+1$. Dans ce cas on a

$$A=\frac{\pi^{\mu'+1}}{(\mu'-1)!}\,\frac{(m+m'+m''+\ldots)!}{m!\,m'!\,m''!\ldots}\,\frac{a^m\,b^{m'}\,c^{m''}\ldots}{\mu'+m+m'+m''+\ldots}.$$

Supposons maintenant μ pair et égal à $2\mu'$. On aura

$$A=\frac{(2\pi)^{\mu'}}{1.3.5\ldots(2\mu'-3)}\,\frac{a^m\,b^{m'}\,c^{m''}\ldots}{2(\mu'+m+m'+m''+\ldots)-1}\,\frac{(m+m'+m''+\ldots)!}{m!\,m'!\,m''!\ldots}.$$

On conclut de tout ceci que l'intégrale d'ordre μ

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\ldots(1-2ax-2by-\ldots+a^2+b^2+\ldots)^{-\left(\frac{\mu-1}{2}\right)}$$
$$\times(1-x^2-\ldots)^{-\frac{1}{2}}(1-a'x-\ldots)[(1-a'x-\ldots)^2-(a'^2+b'^2+\ldots)(x^2+y^2+\ldots-1)]^{-1}$$

est égale, si l'on pose $aa'+bb'+cc'+\ldots=\alpha$, à

$$\frac{\pi^{\mu'+1}}{(\mu'-1)!}\,\frac{1}{\alpha^{\mu'}}\left(\log\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^2}{2}-\ldots-\frac{\alpha^{\mu'-1}}{\mu'-1}\right)$$

ou à

$$\frac{(2\pi)^{\mu'}}{1.3.5\ldots(2\mu'-3)}\,\frac{1}{\alpha^{\mu'-1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\log\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}-\frac{1}{1}-\frac{\alpha}{3}-\frac{\alpha^2}{5}-\ldots-\frac{\alpha^{\mu'-2}}{2\mu'-3}\right),$$

suivant que μ est égal à $2\mu'+1$ ou à $2\mu'$.

L'intégrale

$$\int\int\int dx\,dy\,dz\ldots V_{m,m',m''}\,V_{n,n',n''}\,\sqrt{1-x^2-y^2-z^2-\ldots}$$

est nulle quand $m+m'+m''+\ldots$ est différent de $n+n'+n''+\ldots$.

Enfin, pour terminer, j'indiquerai quelques propriétés de fonctions

analogues aux fonctions $U_{m,m',m'',\ldots}$ et $V_{m,m',m''}$.

Soit

$$P'_{m,m',m'',\ldots} = K_{m,m',m'',\ldots}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{-h+\frac{1}{2}} \times \frac{d^{m+m'+m''+\ldots}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{m+m'+m''+\ldots+h-\frac{1}{2}}}{dx^m\, dy^{m'}\, dz^{m''}\ldots},$$

h étant un nombre entier.

Soit aussi le développement

$$(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{h-\frac{1}{2}}(1 - 2ax - 2by - 2cz - \ldots + a^2 + b^2 + c^2 + \ldots)^{-\frac{\mu-1}{2}-h}$$
$$= \sum a^m b^{m'} c^{m''} \ldots Q'_{m,m',m'',\ldots}$$

Les deux intégrales

$$\iiint dx\, dy\, dz \ldots \frac{P'_{m,m',m'',\ldots}\, P'_{n,n',n'',\ldots}}{(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{-h+\frac{1}{2}}}$$

et

$$\iiint dx\, dy\, dz \ldots Q'_{m,m',m'',\ldots}\, Q'_{n,n',n'',\ldots}(1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots)^{-h+\frac{1}{2}}$$

sont nulles quand les sommes $m + m' + m'' + \ldots$ et $n + n' + n'' + \ldots$ sont différentes.

On a aussi

$$\iiint dx\, dy\, dz \ldots P'_{m,m',m'',\ldots}\, Q'_{n,n',n'',\ldots} = 0,$$

excepté dans le cas où $n = m$, $n' = m'$, $n'' = m''$, ...

Valeurs multiples de certaines intégrales doubles.

Pour terminer ce travail, je vais calculer dans tous les cas les valeurs de certaines intégrales doubles que nous avons eues à considérer antérieurement. On sait que l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi} \log(1 + 2\rho\cos\omega + \rho^2)\, d\omega$$

est nulle quand ρ est inférieur à 1, égale à $2\pi\log\rho$ quand ρ est supérieur à 1, et quand ρ est l'unité, elle a pour valeur $\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$. Beaucoup

d'autres intégrales définies simples, contenant un paramètre constant sous le signe $\int$, ne sont pas des fonctions continues de ce paramètre.

On s'est servi précédemment pour l'étude des fonctions U, V, U, V,... des valeurs de quelques intégrales multiples, calculées pour certaines hypothèses faites sur les constantes qui entraient sous les signes $\int\int\ldots$. Nous nous proposons ici de donner les diverses formes que prennent les valeurs de ces intégrales, quand on suppose aux constantes des valeurs quelconques.

De l'intégrale

$$\int\int(1-2ax-2by+a^2+b^2)^{-1}(1-2a'x-2b'y+a'^2+b'^2)^{-1}\,dx\,dy.$$

Cette intégrale a été calculée par M. Hermite pour l'étude des fonctions $V_{m,n}$.

Soit

$$a^2+b^2=r^2,\quad a'^2+b'^2=r'^2,\quad \frac{aa'+bb'}{rr'}=\cos\theta,\quad \frac{ab'-ba'}{rr'}=\sin\theta,$$

$$x=\frac{a\xi-b\eta}{r},\quad y=\frac{b\xi-a\eta}{r}.$$

L'intégrale que j'appellerai A devient

$$A=\int\int\frac{d\xi\,d\eta}{(1-2r\xi+r^2)[1-2r'(\xi\cos\theta+\eta\sin\theta)+r'^2]}$$

entre les limites $\xi^2+\eta^2\leqq 1$.

Une première intégration par rapport à η donne pour résultat

$$\frac{1}{2r'\sin\theta}\,\frac{1}{1-2r\xi+r^2}\log\frac{1-2r'(\xi\cos\theta-\sqrt{1-\xi^2}\sin\theta)+r'^2}{1-2r'(\xi\cos\theta+\sqrt{1-\xi^2}\sin\theta)+r'^2}.$$

Posant ensuite $\xi=\cos\varphi$, il vient

$$A=\frac{1}{rr'\sin\theta}B,$$

où

$$B=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2}\,\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi-r^2}\log\frac{1-2r'\cos(\varphi+\theta)+r'^2}{1-2r'\cos(\varphi-\theta)+r'^2}$$

Dans l'hypothèse où r et r' sont tous deux moindres que 1, on trouve

$$B = \pi \operatorname{arc\,tang} \frac{rr' \sin\theta}{1 - rr' \cos\theta},$$

de sorte que l'on a

$$A = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{1 - aa' - bb'}.$$

Soit maintenant $r > 1$, $r' < 1$. Posons $r = \frac{1}{r_1}$, alors on a

$$\frac{r \sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2} = \frac{r_1 \sin\theta}{1 - 2r_1 \cos\varphi + r_1^2};$$

de sorte que

$$A = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{r' r_1 \sin\theta}{1 - r_1 r' \cos\theta};$$

mais

$$r_1 r' \sin\theta = \frac{r' \sin\theta}{r} = \frac{rr' \sin\theta}{r^2}, \quad r_1 r' \cos\theta = \frac{rr' \cos\theta}{r^2},$$

donc

$$A = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{a^2 + b^2 - aa' - bb'}.$$

Soit, en second lieu, $r < 1$ et $r' > 1$. Posons $r' = \frac{1}{r'_1}$, alors

$$\log \frac{1 - 2r'\cos(\varphi + \theta) + r'^2}{1 - 2r'\cos(\varphi - \theta) + r'^2} = \log \frac{1 - 2r'_1 \cos(\varphi + \theta) + r'^2_1}{1 - 2r'_1 \cos(\varphi - \theta) + r'^2_1},$$

et l'on a

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{rr'_1 \sin\theta}{1 - rr'_1 \cos\theta} \\ &= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{rr' \sin\theta}{r'^2 - rr' \cos\theta} = \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{a'^2 + b'^2 - aa' - bb'}. \end{aligned}$$

Du reste, ce second cas est une conséquence immédiate du premier, à cause de la symétrie de l'intégrale par rapport à a et b, a' et b'.

Soit, en troisième lieu, $r > 1$ et $r' > 1$. Posant $r = \frac{1}{r'}$, $r' = \frac{1}{r'_1}$, on a

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{r_1 r'_1 \sin\theta}{1 - r_1 r'_1 \cos\theta} \\ &= \frac{\pi}{ab' - ba'} \operatorname{arc\,tang} \frac{ab' - ba'}{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) - aa' - bb'}. \end{aligned}$$

Enfin, nous allons considérer les cas limites, dans lesquels r ou r', ou tous deux, à la fois, sont égaux à l'unité. Soit, par exemple, $r = 1$, $r' \lesseqgtr 1$. On a

$$B = \frac{1}{4}\int_0^\pi d\varphi \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} \log \frac{1 - 2r'\cos(\varphi + \theta) + r'^2}{1 - 2r'\cos(\varphi - \theta) + r'^2}.$$

Quand φ est infiniment petit principal, l'inverse de l'expression qui est sous le signe $\int$ est infiniment petit du premier ordre; donc cette intégrale est infinie; il en est de même, lorsque $r' = 1$ et $r \lesseqgtr 1$, et lorsque l'on a en même temps $r = 1$, $r' = 1$.

De l'intégrale

$$\iint \frac{dx\,dy}{(1 - 2ax - 2by + a^2 + b^2)[(1 - a'x - b'y)^2 - (a'^2 + b'^2)(x^2 + y^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

En employant les mêmes notations que précédemment, on transforme cette intégrale en la suivante :

$$\iint \frac{d\xi\,d\eta}{(1 - 2r\xi + r)[(1 - r'\cos\theta\xi - r'\sin\theta\eta)^2 - r'^2(\xi^2 + \eta^2 - 1)]^{\frac{1}{2}}}.$$

Intégrant d'abord, par rapport à η, entre les limites $-\sqrt{1 - \xi^2}$ et $+\sqrt{1 - \xi^2}$, on a pour cette intégrale, que j'appellerai A',

$$A' = \frac{1}{rr'\cos\theta}\int_{-1}^{+1} \frac{r}{1 - 2r\xi + r^2}\,\frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{1 - r'\cos\theta(\xi - \sqrt{-1}\sqrt{-1\,\xi^2})}{1 - r'\cos\theta(\xi + \sqrt{-1}\sqrt{1 - \xi^2})}\,d\xi;$$

donc, en faisant $\xi = \cos\varphi$, on aura

$$A' = \frac{1}{rr'\cos\theta}\,B',$$

où

$$B' = \int_0^\pi d\varphi \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}\,\frac{1}{\sqrt{-1}} \log \frac{1 - r'\cos\theta\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1 - r'\cos\theta\, e^{\varphi\sqrt{-1}}}.$$

En supposant r et $r'\cos\theta$ inférieurs à 1, on trouve

$$B' = \pi \log \frac{1}{1 - rr'\cos\theta}, \quad \text{d'où} \quad A' = \frac{\pi}{aa' + bb'} \log \frac{1}{1 - aa' - bb'}.$$

Soit maintenant $r > 1$ et $r'\cos\theta < 1$. Posant $r = \frac{1}{r_1}$, il vient

$$B' = \pi \log \frac{1}{1 - r_1 r' \cos\theta} = \pi \log \frac{r^2}{r^2 - rr'\cos\theta},$$

et, par suite,

$$A' = \frac{\pi}{aa' + bb'} \log \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 - aa' - bb'}.$$

Soit, en second lieu, $r < 1$ et $r'\cos\theta > 1$. Posons $r'\cos\theta = \frac{1}{r'_1}$, on aura

$$\log \frac{1 - r'\cos\theta\, e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1 - r'\cos\theta\, e^{\varphi\sqrt{-1}}} = \log \frac{r'_1 - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{r'_1 - e^{\varphi\sqrt{-1}}} = \log \frac{e^{-\varphi\sqrt{-1}}(1 - r'_1 e^{\varphi\sqrt{-1}})}{e^{\varphi\sqrt{-1}}(1 - r'_1 e^{-\varphi\sqrt{-1}})}$$

$$= -2\varphi\sqrt{-1} - \log \frac{1 - r'_1 e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1 - r'_1 e^{\varphi\sqrt{-1}}};$$

par conséquent

$$B' = -\pi \log \frac{1}{1 - rr'_1} - 2\int_0^\pi \varphi\, d\varphi \frac{r\sin\varphi}{1 - 2r\cos\varphi + r^2}.$$

La première partie est égale à

$$\pi \log\left[1 - \frac{rr'\cos\theta}{(r'\cos\theta)^2}\right] = \pi \log\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{aa' + bb'}\right).$$

Calculons la seconde partie; elle est égale à

$$-2\sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^\pi r^n \sin n\varphi\, \varphi\, d\varphi = -2\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{r^n}{n} = -2\pi \log(1 + r).$$

Ainsi

$$B' = \pi \log\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{aa' + bb'}\right) - 2\pi \log\left(1 + \sqrt{a^2 + b^2}\right),$$

donc

$$A' = \frac{\pi}{aa' + bb'} \log\left(1 - \frac{a^2 + b^2}{aa' + bb'}\right) - \frac{2\pi}{aa' + bb'} \log\left(1 + \sqrt{a^2 + b^2}\right).$$

En troisième lieu, supposons $r > 1$ et $r'\cos\theta > 1$; alors on aura

$$B' = \pi \log\left(1 - \frac{1}{aa' + bb'}\right) - 2\pi \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

et

$$A' = \frac{\pi}{aa' + bb'} \log\left(1 - \frac{1}{aa' + bb'}\right) - \frac{2\pi}{aa' + bb'} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$$

Si l'on suppose $r=1$, l'intégrale B' est infinie. Si l'on fait $r'\cos\theta=1$, sans que r soit égal à l'unité, alors

$$B'=\int_0^\pi d\varphi\,\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\,\frac{1}{\sqrt{-1}}\log\frac{1-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-e^{\varphi\sqrt{-1}}};$$

mais

$$\log\frac{1-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-e^{\varphi\sqrt{-1}}}=\log\frac{1+\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\sqrt{-1}}{1-\dfrac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}\sqrt{-1}}$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\log\frac{1-e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{1-e^{\varphi\sqrt{-1}}}=2\,\mathrm{arc\,tang}\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$$
$$=2\,\mathrm{arc\,tang}\left[\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)\right]=\pi-\varphi;$$

donc

$$B'=\pi\int_0^\pi\frac{r\sin\varphi\,d\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}-\int_0^\pi\varphi\,d\varphi\,\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

Si r est inférieur à 1, on aura

$$B'=-\pi\log(1+r)-\pi\log(1+r)=-2\pi\log(1+r)$$

et

$$A'=-\frac{2\pi}{r}\log(1+r)=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left(1+\sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Si r est >1, on aura

$$B'=-2\pi\log\left(1+\frac{1}{r}\right)\quad\text{et}\quad A'=-\frac{2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

De l'intégrale

$$\iint(1-2a'x-2b'y+a'^2+b'^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times(1-ax-by)\left[(1-ax-by)^2-(a^2+b^2)(x^2+y^2-1)\right]^{-1}dx\,dy.$$

Je me servirai des notations que j'ai employées dans le calcul de cette intégrale. Ce calcul suppose essentiellement que r et r' soient inférieurs à l'unité. Je vais actuellement faire l'hypothèse de $r>1$. Dans

ce cas-ci, le résidu de l'expression

$$\frac{1}{2Lz - M(z^2+1) - N(z^2-1)}$$

n'est plus égal, pour toutes les valeurs de ξ comprises entre 1 et + 1, à $\frac{1}{2\sqrt{L^2+N^2-M^2}}$.

Si, dans le dénominateur de l'expression précédente, on fait successivement $z=-1$ et $z=+1$, on obtient pour résultats $-2(L+M)$ et $2(L-M)$, c'est-à-dire

$$-2(1 - r\cos\theta\xi + r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}) \quad \text{et} \quad 2(1 - r\cos\theta\xi - r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}).$$

Si ces deux quantités sont de même signe, le résidu est nul, sinon il y a un résidu différent de zéro. Il faut donc étudier les signes correspondants de $-2(L+M)$ et de $2(L-M)$, ou de $L+M$ et de $M-L$. Je supposerai a, b, a', b' positifs; alors $\cos\theta$ le sera; j'admettrai que $\sin\theta$ le soit aussi. Considérons d'abord la quantité

$$L+M = 1 - r\cos\theta\xi + r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}.$$

Elle est toujours positive, si r est inférieur à l'unité; mais ici nous supposons $r>1$. Pour $\xi=-1$, elle est égale à $1+r\cos\theta$; elle est donc positive. Pour voir comment elle varie avec ξ, prenons sa dérivée par rapport à ξ; cette dérivée, égale à $-r\cos\theta - \frac{r\sin\theta\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$, est d'abord positive, puis elle devient négative pour une valeur de ξ négative. Par conséquent, $L+M$ augmente quand ξ varie à partir de -1, puis diminue avant que ξ ait atteint la valeur zéro. Pour $\xi=1$, on a $L+M=1-r\cos\theta$. Donc si l'on a $r\cos\theta<1$, $L+M$ reste toujours positif; mais si l'on a $r\cos\theta>1$, $L+M$ devient négatif. Cherchons la valeur de ξ pour laquelle il s'annule. L'équation $L+M=0$ devient, quand on y a remplacé ξ par $\cos\varphi$,

$$1 - r\cos\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi = 0,$$

et donne

$$\cos\varphi = \frac{\cos\theta}{r} \pm \frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2-1}.$$

Pour distinguer celle des deux valeurs qu'il faut prendre, substi-

tuons-les dans l'équation précédente, il vient

$$1-\cos^2\theta \mp \sin\theta\cos\theta\sqrt{r^2-1}+r\sin\theta\sin\varphi=0.$$

Comme $\sin\varphi$ est positif, on voit qu'il faut prendre le signe $-$ dans la relation précédente; donc la valeur de $\cos\varphi$ ou de ξ, pour laquelle $L+M$ s'annule, est

$$\xi''=\frac{\cos\theta}{r}+\frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2-1}.$$

Étudions de même $M-L$.

On a

$$M-L=r\sin\theta\sqrt{1-\xi^2}+r\cos\theta\,\xi-1.$$

Pour

$$\xi=-1,\quad M-L=-r\cos\theta-1,$$

la dérivée par rapport à ξ de $M-L$, à savoir: $-\dfrac{r\sin\theta\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}+r\cos\theta$, étant positive tant que ξ est négatif, mais devenant négative pour une valeur positive de ξ inférieure à 1, on voit que $M-L$ augmente d'abord, puis diminue ensuite, avant que ξ ait atteint la valeur 1. Si l'on remplace ξ par $\cos\varphi$, on aura

$$M-L=r\sin\theta\sin\varphi+r\cos\theta\cos\varphi-1=r\cos(\theta-\varphi)-1=r\cos(\varphi-\theta)-1.$$

On voit alors immédiatement que $M-L$ s'annulera toujours pour une valeur de φ supérieure à θ, et comprise même entre θ et $\theta+\frac{\pi}{2}$; et encore une seconde fois, pour une valeur de φ inférieure à θ, si l'on a $r\cos\theta<1$. Ces deux valeurs correspondantes de $\cos\varphi$ sont bien faciles à trouver: la première ξ' et la seconde ξ'' sont données par les formules

$$\xi'=\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2-1},\quad \xi''=\frac{\cos\theta}{r}+\frac{\sin\theta}{r}\sqrt{r^2-1}.$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires à notre discussion. Soit d'abord $r\cos\theta>1$.

$M-L$ est négatif depuis $\xi=-1$ jusqu'à $\xi=\xi'$, et est positif après. $M+L$ est positif depuis $\xi=-1$ jusqu'à $\xi=\xi''$, et est négatif après. Par conséquent, dans l'intervalle de ξ' à ξ'', le résidu est nul, et il fau-

dra faire l'intégration du résidu de -1 à ξ', et de ξ'' à $+1$. Mais ici, le résidu n'est pas le même dans ces deux intervalles. Celle des deux racines

$$\frac{1 - r\cos\theta\xi + \sqrt{1 - 2r\cos\theta\xi + r^2\cos^2\theta}}{M+N}, \quad \frac{1 - r\cos\theta\xi - \sqrt{1 - 2r\cos\theta\xi + r^2\cos^2\theta}}{M+N}$$

qui est comprise entre -1 et $+1$ est la première quand ξ est supérieur à $\frac{1}{r\cos\theta}$, et la seconde quand ξ est inférieur à $\frac{1}{r\cos\theta}$. C'est donc la première, quand ξ est compris entre ξ'' et $+1$, et la seconde, quand ξ est compris entre -1 et ξ'. On s'assure facilement de l'exactitude de cette proposition, en remarquant que l'on a

$$\xi' < \frac{1}{r\cos\theta} \quad \text{et} \quad \xi'' > \frac{1}{r\cos\theta}.$$

Le résidu correspondant à l'intervalle de -1 à ξ' est $-\frac{1}{2\sqrt{L^2+N^2-M^2}}$; le résidu qui correspond à l'autre intervalle est $-\frac{1}{2\sqrt{L^2+N^2-M^2}}$. Donc, dans le cas où $r\cos\theta$ est supérieur à 1, l'intégrale A que nous cherchons est égale à

$$\pi\left(\int_{-1}^{\xi'} \frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}} - \int_{\xi''}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right).$$

Soit maintenant $r\cos\theta < 1$. Alors $L+M$ reste toujours positif; quant à $M-L$, il s'annule deux fois pour $\xi = \xi'$ et $\xi = \xi''$; c'est toujours la seconde racine qui est comprise entre -1 et $+1$, de sorte que, dans ce dernier cas, on a

$$A = \pi\left(\int_{-1}^{\xi'} \frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}} + \int_{\xi''}^{+1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-2r'\xi+r'^2}\sqrt{1-2r\cos\theta\xi+r^2\cos^2\theta}}\right).$$

On calculera les intégrales précédentes par les procédés ordinaires; je ne donne pas leurs valeurs qui sont un peu compliquées.

On voit immédiatement comment on déduira le cas de $r' > 1$ du cas de $r' < 1$, en posant $r' = \frac{1}{r'_1}$.

Je me bornerai à donner la valeur de l'intégrale A dans les hypothèses $r\cos\theta = 1$ et $r' < 1$. On a

$$A = \pi \int_{-1}^{\xi'} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - 2r'\xi + r'^2}\sqrt{2 - 2\xi}}.$$

On trouve sans difficulté

$$A = \frac{2}{\sqrt{r'}} \log \frac{1 + \sqrt{r'}}{2\sin\theta\sqrt{r'} + \sqrt{1 + r'^2 - 2r'\cos^2\theta}}.$$

Enfin, on discuterait sans la moindre difficulté l'intégrale

$$\int\int dx\,dy (1 - 2a'x - 2b'y + a'^2 + b'^2)^{-\frac{3}{2}} (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \times [(1 - ax - by)^2 - (a^2 + b^2)(x^2 + y^2 - 1)]^{-1},$$

qui sert dans l'étude des fonctions $\mho_{m,n}$, $\vartheta_{m,n}$.

SUR UNE TRANSFORMATION

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

DE LA DYNAMIQUE,

PAR M. R. RADAU.

Les équations différentielles qui expriment le mouvement d'un système libre peuvent être présentées, comme on sait, sous plusieurs formes, dont chacune a ses avantages particuliers. L'une des plus simples est celle où les secondes dérivées des coordonnées par rapport au temps sont égalées aux dérivées partielles d'une même fonction, appelée *fonction des forces*.

On peut toujours employer cette forme quand les mobiles ne sont soumis qu'à leurs attractions mutuelles. Dans ce cas, la fonction des forces ne renferme que les différences des coordonnées, circonstance qui facilite singulièrement la solution du problème. Il en résulte d'abord que la somme des dérivées partielles de la fonction des forces par rapport aux coordonnées de même nom s'annule, et cette remarque fournit immédiatement trois intégrales sous la forme de relations linéaires entre les coordonnées homonymes et le temps : ce sont les trois équations qui établissent le mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité. Grâce à ces trois intégrales, la recherche du mouvement absolu du système se réduit à celle du mouvement relatif des différents corps. Si on connaissait à chaque instant la *configuration* du système, ou la situation relative des mobiles autour de leur centre de

gravité, on en trouverait les positions absolues par une simple addition (en supposant toutefois qu'il fût possible d'avoir les valeurs *numériques* des six constantes qui déterminent la trajectoire du centre de gravité dans l'espace).

Ainsi la forme particulière de la fonction des forces, qui ne dépend ici que des distances des mobiles ou des différences de leurs coordonnées, nous dispense d'en déterminer le mouvement absolu. Il nous suffit de chercher les positions relatives des différents corps, et c'est là d'ailleurs la question principale lorsqu'il s'agit du système solaire, car nous ne connaissons pas de point fixe dans l'espace qui pourrait nous servir de repère pour y rapporter le mouvement absolu du soleil et des planètes.

Les équations différentielles du problème se prêtent d'elles-mêmes à cette réduction; on peut, sans rien changer à leur forme, transporter l'origine des coordonnées au centre de gravité. Un système libre se meut donc autour de son centre de gravité comme autour d'un point fixe. Comme les équations différentielles restent les mêmes, soit qu'on prenne pour origine des coordonnées un point fixe ou qu'on rapporte tout au centre de gravité du système, les intégrales sont aussi les mêmes dans les deux cas, aux constantes près. Les trois équations linéaires qui, dans le premier cas, ont la forme $\sum mx = A + Bt$ prennent dans le second la forme $\sum mx = 0$, que l'on obtient en faisant $A = B = 0$. Les intégrales des forces vives et des aires s'énoncent d'une manière identique dans les deux cas. Le principe des forces vives nous apprend que la différence entre la demi-force vive du système et la fonction des forces est une constante. Le principe des aires nous dit que la quantité du mouvement aréolaire dans un plan quelconque, ou la somme des produits des masses par les projections des vitesses aréolaires sur un plan quelconque, est une constante. Ces principes subsistent aussi bien pour une origine fixe que pour les coordonnées rapportées au centre de gravité. Il n'y a de changé que les valeurs numériques des constantes.

Sous les deux formes que nous avons considérées jusqu'ici, le problème des $n+1$ corps dépend de $3n+3$ équations de second ordre. Il

est facile d'en réduire le nombre à $3n$ seulement, et on y arrive de plusieurs manières. On peut d'abord placer l'origine des coordonnées dans l'un des mobiles, que l'on considère alors comme un corps central autour duquel se meuvent n planètes. Cette fiction convient particulièrement aux systèmes qui renferment un corps de masse prépondérante, par exemple au système solaire. Si on retranche les trois équations du corps central des $3n$ équations des planètes, on obtient $3n$ équations différentielles pour les coordonnées relatives des planètes rapportées au corps central.

On peut, en second lieu, prendre pour origine le centre de gravité et profiter des trois relations $\sum mx = 0$, $\sum my = 0$, $\sum mz = 0$ pour éliminer les coordonnées x_0, y_0, z_0 du corps central; on obtient alors $3n$ équations pour les coordonnées des planètes rapportées au centre de gravité. Mais dans les deux cas on sacrifie à la fois la forme des équations différentielles et celle des intégrales. Les secondes dérivées des coordonnées par rapport au temps ne sont plus représentées par les dérivées partielles d'une même fonction, et les intégrales fournies par les principes des forces vives et des aires revêtent une forme assez compliquée. Ainsi, lorsqu'on prend pour origine le corps central, les forces vives et les vitesses aréolaires des différents corps par rapport à l'origine des coordonnées sont remplacées dans les intégrales par les forces vives et les vitesses aréolaires *relatives* de tous les corps pris deux à deux.

Ces inconvénients peuvent être évités au moyen d'une transformation linéaire dont Jacobi a indiqué le principe dans son *Mémoire sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps* (*).

Je fais voir que cette tranformation peut être considérée comme une substitution orthogonale entre deux systèmes de variables, qui sont, d'un côté, les coordonnées absolues des $n+1$ corps donnés, et, de l'autre, les coordonnées de $n+1$ masses fictives, dont une est la masse totale du système, placée au centre de gravité.

Une substitution orthogonale, appliquée *simultanément* à deux systèmes de variables $x_0, x_1, \ldots, x_n$ et $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$, auxquelles on

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 18 août 1842.

substitue les systèmes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ et $\xi'_0, \xi'_1, \ldots, \xi'_n$, laisse intacte la forme de la somme $x_0x'_0 + x_1x'_1 + \ldots + x_nx'_n$, que je désigne par le symbole $\mathfrak{S} = \sum((x))$, de sorte que l'équation

$$\sum((x)) = \sum((\xi))$$

exprime le résultat d'une substitution orthogonale double. Comme il s'agit ici de relations linéaires, on peut prendre à la place des variables leurs dérivées; en outre, on peut remplacer chaque produit xx' par une somme de produits semblables. Il s'ensuit que $((x))$ peut représenter le carré d'un rayon vecteur, la force vive, la vitesse aréolaire, ou le produit $d^2x.\delta x$, et que la somme $\mathfrak{S}$ sera tour à tour la force vive du système, le mouvement aréolaire, la variation δU de la fonction des forces, ou telle autre expression formée d'une manière analogue. On en conclut qu'une substitution orthogonale, appliquée aux coordonnées d'un système de points matériels, ne change rien à la forme des équations différentielles du mouvement, ni à celle des intégrales des forces vives et des aires.

On obtient en outre une réduction du nombre des inconnues, si on fait figurer parmi les nouvelles variables les coordonnées du centre de gravité du système, lesquelles sont connues par les trois intégrales du centre de gravité. Elles disparaissent d'ailleurs des intégrales et des équations différentielles, et le problème se réduit à un problème du mouvement de n corps autour d'un centre fixe. La somme $\mathfrak{S}$ ne se compose plus maintenant que de n termes, et elle est égale à la somme analogue, composée de $n+1$ termes, que l'on obtient en rapportant les corps donnés à leur centre de gravité.

Les coefficients de la substitution qui fournit ces résultats ne sont pas complétement déterminés. Cependant, ce n'est point simplement une substitution orthogonale du degré $n+1$, car la condition que l'on introduit en faisant figurer parmi les nouvelles variables les coordonnées du centre de gravité, détermine une partie des coefficients. Je fais voir que les coefficients peuvent être formés à l'aide des coefficients d'une substitution orthogonale du degré n. Dans le cas de trois corps,

c'est donc une substitution binaire qui fournit les coefficients de la substitution ternaire demandée.

On peut d'ailleurs réduire la somme $\mathbf{S}$ à n termes d'une manière directe. Il suffit pour cela de rapporter le deuxième corps au centre du premier, le troisième au centre de gravité des deux premiers, le quatrième au centre de gravité des trois premiers, et ainsi de suite, pourvu qu'en même temps on modifie légèrement les masses. Les relations linéaires qui existent entre ces coordonnées et les anciennes constituent un cas particulier de la substitution orthogonale dont je viens de parler.

Un autre cas particulier est celui où la transformation se réduit à un changement d'origine des coordonnées, les masses fictives étant simplement celles de n corps du système, que l'on peut appeler les planètes. Le système transformé est alors le système planétaire, rapporté à un point mobile qui a beaucoup d'analogie avec le centre de gravité et que j'appelle le *point canonique*, parce qu'on retrouve la forme canonique des équations du mouvement en le prenant pour origine. J'arrive ainsi au théorème suivant.

« Dans le mouvement d'un système libre de $n+1$ corps, soumis seulement à leurs attractions mutuelles, il existe $n+1$ centres qui ont chacun pour n corps les mêmes propriétés que le centre de gravité possède pour le système entier. Rapporté à l'un de ces centres, le mouvement de n corps du système a lieu comme autour d'un point fixe. Pour trouver ces centres, que j'appelle les *points canoniques*, il suffit d'attribuer à tous les corps des masses fictives égales aux racines carrées de leurs masses véritables, et à leur centre de gravité une masse $\sqrt{m}$, égale à la racine carrée de la masse totale m du système, puis de chercher les $n+1$ centres de gravité de la masse $\sqrt{m}$ combinée successivement avec chacune des masses $\sqrt{m_i}$. »

Faisant ensuite l'application de ces formules aux problèmes des trois corps et des quatre corps, je montre que l'on peut obtenir les coefficients de la transformation générale d'une manière très-simple, en prenant pour point de départ la transformation spéciale par les centres de gravité successifs. Les arbitraires de la substitution se présentent alors sous la forme d'angles auxiliaires.

Lorsqu'on veut appliquer l'une de ces transformations au système solaire en général, ou à la théorie de la lune en particulier, on peut toujours déterminer les coordonnées des masses fictives de manière qu'elles s'écartent très-peu des coordonnées relatives des corps donnés; en d'autres termes, on peut remplacer ces corps par des corps fictifs qui occupent des positions très-voisines des véritables. Cela permet de considérer les nouvelles coordonnées comme une première approximation des coordonnées cherchées; on obtient l'expression rigoureuse de ces dernières en ajoutant à la coordonnée de chaque corps de petites fractions constantes des coordonnées des autres corps. C'est comme si chaque orbite était corrigée à l'aide d'une série d'épicycles semblables aux autres orbites.

En dernier lieu, j'applique encore au problème réduit la transformation par les coordonnées polaires, et j'exprime les dérivées des nouvelles variables par les dérivées partielles de la fonction des forces U. Faisant l'application de ces formules au problème des trois corps, je montre que ce problème se réduit très-simplement à l'intégration d'un système canonique de huit équations du premier ordre, si l'on prend pour variables les deux *rayons vecteurs*, leurs *distances au nœud des orbites*, les *vitesses radiales* et les *aires* ou vitesses aréolaires. Cela tient à une circonstance importante, dont Jacobi a tiré un grand parti dans son Mémoire sur le problème des trois corps. Les plans des orbites des deux corps fictifs se coupent toujours dans le plan invariable; la ligne des nœuds est donc la même pour les deux orbites, et les longitudes des nœuds disparaissent aussi bien des intégrales des aires que de la fonction des forces. Le principe des aires fournit alors deux relations qui permettent d'exprimer les inclinaisons en fonction des aires, et l'on arrive à huit équations qui ne renferment que des éléments relatifs au mouvement dans les deux orbites, à savoir : les rayons vecteurs, leurs distances à l'intersection des orbites, les vitesses radiales et les vitesses aréolaires; le plan invariable a disparu. On pourrait aussi obtenir un système canonique de huit équations en éliminant le nœud du plan des trois corps; c'est ce que Edmond Bour a fait en 1856.

Si des huit équations du premier ordre on élimine encore la différentielle du temps, elles se réduisent à sept équations, dont on connaît déjà une intégrale, $H = h$. On peut donc dire que le problème a été

ramené à l'intégration de six équations du premier ordre. Ce résultat avait été déjà obtenu par Jacobi (quoiqu'il ne l'ait pas dit d'une manière explicite), mais ses équations n'ont pas la forme canonique.

1. On appelle *substitution orthogonale* une transformation linéaire qui se renverse par une simple rotation du carré des coefficients autour de sa diagonale, rotation par laquelle les lignes deviennent colonnes, et *vice versâ*. La substitution orthogonale est donc représentée par la formule

$$(1) \qquad x_i = \sum^{h} c_{ik}\,\xi_k, \quad \xi_i = \sum^{h} c_{ki}\,x_k.$$

Les coefficients d'une substitution orthogonale doivent satisfaire aux relations suivantes :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum^{h} c_{hi}\,c_{hk} = 0, \quad \sum^{h} c_{hi}\,c_{hi} = 1, \\ \text{ou bien} \\ \displaystyle\sum^{h} c_{ih}\,c_{kh} = 0, \quad \sum^{h} c_{ih}\,c_{ih} = 1. \end{array} \right.$$

A chaque combinaison d'une variable x_i avec une variable ξ_k correspond un coefficient c_{ik}, on a

$$c_{ik} = \frac{dx_i}{d\xi_k} = \frac{d\xi_k}{dx_i}.$$

La formule de transformation (1) s'applique d'ailleurs, non-seulement aux variables x et ξ, mais encore à leurs dérivées dx et $d\xi$ et aux caractéristiques D_x et D_ξ; on a, par exemple,

$$D_{x_i} = \sum^{h} c_{ik}\,D_{\xi_k}, \quad D_{\xi_i} = \sum^{h} c_{ki}\,D_{x_k}.$$

Si la même substitution orthogonale intervient simultanément entre les variables x et ξ, et entre les variables y et η, on a

$$\sum^{i} x_i\,y_i = \sum^{h,k} \xi_h\,\eta_k \sum^{i} c_{ih}\,c_{ik}.$$

Or, grâce aux relations (2), tous les termes de cette somme pour lesquels h diffère de k disparaissent; il ne reste donc à droite que les produits $\xi_h \eta_h$, et nous pouvons écrire

$$\sum xy = \sum \xi\eta. \tag{2 bis}$$

Cette équation a une signification symbolique. A la place des systèmes conjugués x, ξ et y, η, on peut évidemment prendre deux systèmes quelconques, *assujettis aux mêmes relations linéaires*. On peut donc remplacer y et η par x et ξ, ensuite x et ξ par dx et $d\xi$, et ainsi de suite, ce qui donne

$$\sum x^2 = \sum \xi^2, \quad \sum dx^2 = \sum d\xi^2, \quad \sum x\,dx = \sum \xi\,d\xi, \quad \sum D_x^2 = \sum D_\xi^2, \ldots,$$

où D^2 signifie une seconde dérivée ou le carré d'une dérivée première. On peut aussi ajouter ou retrancher plusieurs égalités de cette espèce, de sorte que, si la même substitution a été appliquée à un troisième système de variables conjuguées z et ζ, nous aurons

$$\begin{aligned}
&\sum (x^2 + y^2 + z^2) = \sum (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),\\
&\sum (dx^2 + dy^2 + dz^2) = \sum (d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2),\\
&\sum (x\,dy - y\,dx) = \sum (\xi\,d\eta - \eta\,d\xi),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Si les variables x satisfont à un système d'équations différentielles du type $\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{dU}{dx_i}$, les variables ξ seront assujetties à satisfaire à un système tout semblable. En effet, si dans l'identité (2 *bis*) nous remplaçons xy par $d^2x.\delta x + d^2y.\delta y + d^2z.\delta z$, nous avons, en étendant la somme à toutes les variables,

$$\sum \frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi = \sum \frac{d^2x}{dt^2}\delta x = \delta U,$$

d'où il suit que

$$\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi_i}.$$

Il en est de même à l'égard des systèmes canoniques de la forme

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dH}{dp'}, \quad \frac{dp'}{dt} = -\frac{dH}{dp}.$$

Si la substitution intervient simultanément entre les variables p et q, p' et q', on aura, en vertu de (2 *bis*),

$$\delta H = \sum \left(\frac{dp}{dt}\delta p' - \frac{dp'}{dt}\delta p\right) = \sum \left(\frac{dq}{dt}\delta q' - \frac{dq'}{dt}\delta q\right),$$

d'où

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dq'}, \quad \frac{dq'}{dt} = -\frac{dH}{dq}.$$

Je représenterai par le symbole $((x))$ le produit de deux quantités assujetties à la même substitution linéaire, ou bien une somme de plusieurs produits de ce genre, de sorte que $((x))$ représentera tour à tour l'une des expressions

$$\begin{gathered} xy, \quad x^2, \quad y^2, \quad x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2, \ldots, \\ x\,dx, \quad x\,dy, \quad x\,dy - y\,dx, \ldots, \\ dx^2, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2, \ldots, \\ d^2x\,\delta x, \quad d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z, \ldots, \\ x\,D_x, \quad D_x^2, \quad D_x D_z, \ldots, \end{gathered}$$

et $((\xi))$ l'expression correspondante dans les variables ξ, η, ζ, liées aux premières par la transformation linéaire dont il s'agit. Le résultat d'une substitution orthogonale peut alors s'exprimer par l'équation symbolique

$$\sum ((x)) = \sum ((\xi)). \tag{3}$$

Si les parenthèses renferment les différences $x_i - x_h$, $\xi_i - \xi_h$, on les traitera comme les variables x, ξ elles-mêmes, de sorte que $((x_i - x_h))$ représentera le carré $(x_i - x_h)^2$, ou bien $(dx_i - dx_h)^2$, ou une autre expression semblable du second degré.

Nous pouvons maintenant écrire $\sqrt{m_i}\,x_i$ à la place de x_i, et $\sqrt{\mu_i}\,\xi_i$ à la

place de ξ_i. Les formules de transformation deviennent, dans ce cas,

$$\sqrt{m_i}\,x_i = \sum^h c_{ih}\sqrt{\mu_h}\,\xi_h, \quad \sqrt{\mu_i}\,\xi_i = \sum^h c_{hi}\sqrt{m_h}\,x_h,$$

et l'équation symbolique se change en

$$\sum m((x)) = \sum \mu((\xi)). \tag{4}$$

Cette forme est commode lorsque les variables x, y, z représentent les coordonnées d'un système de points matériels. Nous supposerons que le système se compose de $n+1$ points qui ont les masses m_0, $m_1, \ldots$, m_n et qui se meuvent librement dans l'espace sous l'influence de leurs attractions mutuelles. Les ξ, η, ζ seront les coordonnées de $n+1$ corps fictifs ayant les masses μ_0, $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Le symbole $((x))$ représente alors le carré du rayon vecteur, ou le carré de la vitesse, ou le double de l'aire que la projection du rayon vecteur décrit dans un plan quelconque, ou le produit de la force accélératrice par la variation δx, ou une autre fonction semblable des coordonnées.

On sait que $x\,dy - y\,dx$ est le double de l'aire que la projection du rayon vecteur sur le plan des xy décrit dans le temps dt. J'appellerai $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ la *vitesse aréolaire*, et $m\dfrac{x\,dy - y\,dx}{dt}$ le *mouvement aréolaire* dans le plan des xy $\left(\text{par analogie avec la quantité de mouvement } m\dfrac{dx}{dt}\right)$. La formule (4) nous apprend alors que la substitution orthogonale reproduit sous leur forme primitive :

La *somme des produits des masses par les carrés des distances*; les *moments d'inertie*; la *force vive* du système; le *mouvement aréolaire* dans un plan quelconque; la *variation de la fonction des forces*.

En effet, si on tient compte des équations de mouvement, la formule (4) donne

$$\begin{aligned} dt^2\,\delta U &= \sum m(d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z) \\ &= \sum \mu(d^2\xi\,\delta\xi + d^2\eta\,\delta\eta + d^2\zeta\,\delta\zeta). \end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'un système d'équations de la forme

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dU}{dx}$$

se change par la substitution en un système semblable

$$\mu\frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{dU}{d\xi}.$$

2. Les masses μ sont en général arbitraires, et on pourrait les prendre égales à l'unité. En effet, ce qui se détermine par la substitution, ce n'est ni la coordonnée ξ ni la masse μ, c'est le produit $\sqrt{\mu}\,\xi$ ou bien $\mu\xi^2$, que l'on peut représenter plus simplement par ξ^2.

Nous ferons toutefois une exception pour la masse μ_0. Nous conviendrons qu'elle représente la somme m des masses m_i,

$$\mu_0=m=m_0+m_1+\ldots+m_n,$$

et nous la supposerons située au centre de gravité du système donné. Soient X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité, nous aurons

$$\xi_0=X,\quad \eta_0=Y,\quad \zeta_0=Z,$$

et

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}\mu_0\xi_0&=mX=\sum m_hx_h,\\ \mu_0\eta_0&=mY=\sum m_hy_h,\\ \mu_0\zeta_0&=mZ=\sum m_hz_h.\end{aligned}\right.$$

Cette condition détermine les coefficients c_{h0} dans (1). Il faut prendre

$$(6)\qquad c_{h0}=\sqrt{\frac{m_h}{m}}$$

pour avoir $\mu_0\xi_0=\sum m_hx_h,\ldots$. Il s'ensuit que

$$c_{i0}\sqrt{\mu_0}\,\xi_0=\sqrt{m_i}\,X,$$

et, par conséquent,

$$(7)\qquad x_i-X=\frac{1}{\sqrt{m_i}}\sum_1^n c_{ih}\sqrt{\mu_h}\,\xi_h.$$

Les formules (2) donnent encore

$$\sum_0^n c_{hi}\sqrt{m_h} = 0 \quad \text{ou bien} \quad c_{0i}\sqrt{m_0} = -\sum_1^n c_{hi}\sqrt{m_h},$$

d'où

$$(8) \qquad \sqrt{\mu_i}\,\xi_i = \sum_1^n c_{hi}\sqrt{m_h}(x_h - x_0),$$

les sommes devant s'étendre depuis $h=1$ jusqu'à $h=n$. Les formules (7) et (8) montrent que les $3n$ variables $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n, \zeta_n$ remplacent les $3n+3$ coordonnées $x-\mathrm{X}, y-\mathrm{Y}, z-\mathrm{Z}$, dont l'origine est au centre de gravité. Cela tient à l'existence des trois équations

$$(9) \qquad \sum m_i(x_i - \mathrm{X}) = 0, \quad \sum m_i(y_i - \mathrm{Y}) = 0, \quad \sum m_i(z_i - \mathrm{Z}) = 0,$$

par lesquelles ces $3n+3$ coordonnées se réduisent à $3n$ variables indépendantes. L'équation symbolique (4) devient à présent

$$(10) \qquad \sum_0^n m_i((x_i)) - m((\mathrm{X})) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

On peut lui donner une autre forme très-intéressante. On démontre sans difficulté l'identité

$$\sum^{i,h} m_i m_h (x_i - x_h)(y_i - y_h) = \sum m_i \cdot \sum m_i x_i y_i - \sum m_i x_i \cdot \sum m_i y_i,$$

que l'on généralise en l'écrivant de cette manière

$$(11) \qquad \sum^{i,h} m_i m_h((x_i - x_h)) = m\sum m_i((x_i)) - \left(\left(\sum m_i x_i\right)\right),$$

où $m = \sum m_i$. Nous remplacerons $\sum m_i x_i$ par $m\mathrm{X}$, et comme l'expression à gauche ne change pas, si on diminue tous les x d'une même quantité, par exemple de X, il vient, à cause de (9) et (11),

$$(12) \quad \frac{1}{m}\sum_0^n m_i m_h((x_i - x_h)) = \sum_0^n m_i((x_i)) - m((\mathrm{X})) = \sum_0^n m_i((x_i - \mathrm{X})) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

Dans la première somme, il faut donner aux indices i et h toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à n; elle se compose donc de $\frac{n(n+1)}{2}$ termes; la seconde et la troisième renferment chacune $n+1$ termes, la dernière n'a que n termes. La première dépend des differences des coordonnées, ou bien des coordonnées rapportées à l'un des mobiles; la seconde est formée avec les coordonnées absolues (par rapport à un point fixe); dans la troisième figurent les coordonnées relatives au centre de gravité; enfin la quatrième contient les coordonnées des corps fictifs.

3. Notre substitution orthogonale dans laquelle figurent parmi les variables nouvelles les coordonnées XYZ du centre de gravité, a donc la vertu de réduire à n termes la somme

$$\mathrm{S}=\frac{1}{m}\sum_0^n m_i m_h((x_i-x_h))=\sum_0^n m_i((x_i-\mathrm{X})),$$

qui représente soit la force vive, soit le mouvement aréolaire d'un système de $n+1$ corps par rapport au centre de gravité, soit la variation $\delta\mathrm{U}$, soit la somme des produits des masses par les carrés de leurs distances au centre de gravité, soit telle autre fonction semblable des coordonnées.

Le même résultat peut aussi s'obtenir directement de plusieurs manières. Ainsi, l'équation (12) montre que l'on aura

$$\mathrm{S}=\sum_1^n m_i((x_i)) \tag{13}$$

en prenant pour origine un point mobile défini par la condition

$$\sqrt{m_0}\,x_0\pm\sqrt{m}\,\mathrm{X}=0.$$

Si nous choisissons le signe supérieur, nous avons

$$(\sqrt{mm_0}+m_0)x_0+m_1x_1+m_2x_2+\ldots=0.$$

Soit A le centre de gravité du système, et B le point mobile à partir duquel nous compterons les coordonnées. Les relations ci-dessus

montrent alors que le point B sera situé sur la ligne qui joint m_0 au centre de gravité A; on peut le définir le centre de gravité d'une masse $\sqrt{m_0}$ remplaçant m_0, et d'une masse $\sqrt{m}$, située en A, ou bien le centre de gravité du système, pris en ajoutant à m_0 la masse $\sqrt{mm_0}$, qui est la moyenne géométrique de m_0 et de la masse totale m du système. Soit S le lieu de m_0, que j'appellerai le *corps principal*, et P le centre de gravité des corps $m_1, \ldots, m_n$, qui seront appelés les *planètes*. Les quatre points S, B, A, P seront évidemment en ligne droite, ils partageront la ligne SP suivant des rapports constants. En prenant m_0 pour unité des masses, on aura

$$\mathrm{SB} : \mathrm{SA} : \mathrm{BP} :: \frac{1}{1+\sqrt{m}} : \frac{1}{\sqrt{m}} : \frac{1}{m-1}.$$

S'il s'agit du système solaire, et que m_0 soit le soleil, $\sqrt{m} = 1{,}00067$; le point B occupe alors le milieu de SA et se trouve toujours compris entre la surface et le centre du soleil.

Désignons maintenant par xyz les coordonnées rapportées au point B, afin de les distinguer des xyz qui se rapportent à un point fixe. La coordonnée de A par rapport à B sera $-\frac{1}{\sqrt{m}}\mathrm{x}_0$, et nous aurons

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x_i - x_k = \mathrm{x}_i - \mathrm{x}_k \\ & x_i - \mathrm{X} = \mathrm{x}_i + \frac{1}{\sqrt{m}}\mathrm{x}_0 \\ & \sqrt{m}\,(x_0 - \mathrm{X}) = (1+\sqrt{m})\,\mathrm{x}_0 = -\sum_1^n m_k \mathrm{x}_k. \end{aligned} \right.$$

Les coordonnées héliocentriques des planètes deviendront

$$x_i - x_0 = \mathrm{x}_i - \mathrm{x}_0 = \mathrm{x}_i + \frac{1}{1+\sqrt{m}} \sum_1^n m_k \mathrm{x}_k,$$

elles se composeront d'un terme principal x_i et d'un terme de correction égal à la coordonnée $-\mathrm{x}_0$ du point B; ce terme est de l'ordre des masses planétaires et pourra être considéré comme une perturbation. La formule

$$(15) \qquad \mathrm{S} = \sum_1^n m_i((\mathrm{x}_i)) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i))$$

nous dit que les coordonnées xyz dépendent des anciennes par une substitution orthogonale, comme les $\xi\eta\zeta$. Il s'ensuit que la force vive et le mouvement aréolaire des planètes rapportées au point B sont identiques à la force vive et au mouvement aréolaire du système entier, rapporté au centre de gravité A. Le plan invariable est le même pour les points A et B. Enfin, les équations du mouvement ont la forme canonique si on fait usage des coordonnées xyz, puisque l'espèce d'invariant que je désigne par S peut représenter δU ou δH. C'est pour cette raison que j'ai appelé le point B le *point canonique* (*).

Comme il est permis de prendre pour m_0 l'un quelconque des corps donnés, nous avons là un théorème général, dont voici l'énoncé :

« *Dans le mouvement d'un système libre de $n+1$ corps qui ne sont soumis qu'à leurs attractions mutuelles, il existe $n+1$ centres qui ont chacun pour n corps les propriétés que le centre de gravité possède pour le système entier. Rapporté à l'un de ces centres, que nous appellerons les points canoniques, le mouvement de n corps du système a lieu comme autour d'un point fixe. Pour trouver les points canoniques, il suffit d'attribuer à tous les corps des masses fictives égales aux racines carrées de leurs masses véritables, et à leur centre de gravité une masse $\sqrt{m}$, égale à la racine carrée de la masse totale m du système, puis de chercher les $n+1$ centres de gravité de la masse $\sqrt{m}$ combinée successivement avec chacune des masses $\sqrt{m_i}$.* »

On aurait $n+1$ points analogues en prenant $-\sqrt{m}$ à la place de $\sqrt{m}$.

4. L'équation (12) est encore susceptible d'une autre transformation par laquelle la somme S se réduit directement à n termes. On y arrive à l'aide de l'identité suivante, analogue à (11), et que l'on vérifie aisément :

$$(16) \quad \sum_0^{n-1} m_i m_k((x_i - x_k)) = (m - m_n)\sum_0^n m_i((x_i - \mathrm{X})) - m m_n((x_n - \mathrm{X})).$$

Je désignerai à présent par M_i la somme des masses $m_0, m_1, \ldots, m_i$, et par X_i l'une des coordonnées du centre de gravité des mêmes masses,

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 22 juin 1868.

de sorte que

$$M_i = \sum_0^i m_h, \quad M_i X_i = \sum_0^i m_h x_h, \quad M_0 = m_0, \quad M_n = m,$$

$$X_0 = x_0, \quad X_n = X,$$

$$x_i - X_i : x_i - X_{i-1} : X_i - X_{i-1} :: M_{i-1} : M_i : m_i.$$

La formule (16) devient alors

$$\sum_0^{n-1} m_i m_h ((x_i - x_h)) = M_{n-1} \sum_0^n m_i ((x_i - X_n)) - M_n m_n ((x_n - X_n)).$$

Or l'équation (12) nous donne, si nous remplaçons n par $n - 1$,

$$\sum_0^{n-1} m_i m_h ((x_i - x_h)) = M_{n-1} \sum_0^{n-1} m_i ((x_i - X_{n-1}));$$

par conséquent

$$\sum_0^n m_i ((x_i - X_n)) - \sum_0^{n-1} m_i ((x_i - X_{n-1})) = \frac{M_n}{M_{n-1}} m_n ((x_n - X_n)). \tag{17}$$

Cette formule étant appliquée plusieurs fois de suite, il vient

$$\sum_0^n m_i ((x_i - X_n)) = \sum_1^n \frac{M_i}{M_{i-1}} m_i ((x_i - X_i)) = \sum_1^n \frac{M_{i-1}}{M_i} m_i ((x_i - X_{i-1})),$$

ou bien

$$\mathrm{S} = \sum_1^n \frac{M_{i-1}}{M_i} m_i ((x_i - X_{i-1})). \tag{18}$$

On obtient donc une substitution orthogonale qui réduit S à n termes, en prenant

$$\mu_i = m_i \frac{M_{i-1}}{M_i}, \quad \xi_i = x_i - X_{i-1}. \tag{19}$$

Les relations linéaires par lesquelles les variables ξ dépendent des

anciennes coordonnées $x - X$ sont très-simples. Nous avons d'abord $\xi_1 = x_1 - x_0$, puis

$$\frac{x_i - X_i}{M_{i-1}} = \frac{\xi_i}{M_i} = \frac{X_i - X_{i-1}}{m_i},$$

d'où, en écrivant de nouveau X pour X_n,

$$x_i - X_i = \xi_i - \frac{m_i}{M_i}\xi_i, \quad X_i - X = -\sum_{i+1}^{n} \frac{m_h}{M_h}\xi_h,$$

d'où l'on tire

$$x_i - X = \xi_i - \sum_{i}^{n} \frac{m_h}{M^h}\xi_h. \tag{20}$$

La coordonnée de m_0 est donc

$$x_0 - X = -\sum_{1}^{n} \frac{m_h}{M^h}\xi_h,$$

et celle de m_n :

$$x_n - X = \frac{M_{n-1}}{M_n}\xi_n.$$

La comparaison avec la formule générale (7) montre que les coefficients de transformation peuvent être choisis de la manière suivante :

$$c_{ih} = 0 \quad \text{pour} \quad h < i, \quad c_{ih} = -\sqrt{\frac{m_i m_h}{M_h M_{h-1}}} \quad \text{pour} \quad h > i,$$

et

$$c_{ii} = \sqrt{\frac{M_{i-1}}{M_i}} = \frac{M_i - m_i}{\sqrt{M_i M_{i-1}}} \quad \text{pour} \quad h = i.$$

Si le premier corps m_0 est le soleil, les autres étant les planètes, les rapports $\frac{M_{i-1}}{M_i}$ s'écartent très-peu de l'unité, et les masses fictives μ_i diffèrent à peine des masses planétaires m_i. La première coordonnée $x_0 - X$ est alors une quantité très-petite de l'ordre des masses planétaires, les autres coordonnées $x_i - X$ se composent chacune d'un terme principal ξ_i et d'une série de termes secondaires, de l'ordre des forces

perturbatrices :

$$x_0 - X = -\frac{m_1\xi_1}{m_0+m_1} - \frac{m_2\xi_2}{m_0+m_1+m_2} - \ldots,$$

$$x_1 - X = \xi_1 - \frac{m_1\xi_1}{m_0+m_1} - \frac{m_2\xi_2}{m_0+m_1+m_2} - \ldots,$$

$$x_2 - X = \xi_2 - \frac{m_2\xi_2}{m_0+m_1+m_2} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_n - X = \xi_n - \frac{m_n\xi_n}{m_0+m_1+\ldots+m_n}.$$

On peut encore comprendre dans cet engrenage la terre et la lune. Il faut, dans ce cas, représenter par m_0 la terre, par m_1 la lune, par m_2 le soleil. La masse $\mu_1 = m_1\frac{m_0}{m_0+m_1}$ diffère alors très-peu de la masse lunaire m_1, les masses μ_3, μ_4, ..., très-peu des masses planétaires m_3, m_4, ... Enfin, la masse μ_2 du soleil fictif est à très-peu près égale à la masse terrestre m_0, puisque

$$\mu_2 = (m_0 + m_1)\frac{m_2}{m_2+m_1+m_0}.$$

Lorsqu'il ne s'agit que de deux corps ($n = 1$), on a d'ailleurs

$$\begin{aligned}m_0((x_0 - X)) + m_1((x_1 - X)) = \mu_1((\xi_1)) &= \frac{m_0 m_1}{m_0+m_1}((x_1 - x_0))\\ &= \frac{m_0+m_1}{m_0} m_1((x_1 - X))\\ &= \frac{m_0+m_1}{m_1} m_0((x_0 - X)).\end{aligned}$$

On peut donc indifféremment considérer, soit le mouvement des masses accouplées m_0, m_1, qui pivotent ensemble, aux extrémités de la ligne r_{01}, autour de leur centre de gravité commun, soit celui d'une masse $\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0+m_1}$, tournant autour de m_0, soit enfin celui d'une masse $m_0\frac{m_0+m_1}{m_1}$ ou $m_1\frac{m_0+m_1}{m_0}$, remplaçant respectivement m_0 ou m_1, et tournant autour du centre de gravité des deux corps. Cela revient à

des changements de notation, car nous avons

$$\frac{x_1 - X}{m_0} = \frac{X - x_0}{m_1} = \frac{x_1 - x_0}{m_0 + m_1}.$$

Si nous ajoutons un troisième corps, nous pouvons introduire la masse $\mu_2 = \frac{m_2(m_0 + m_1)}{m_0 + m_1 + m_2}$ qui tourne autour du centre de gravité des deux premiers corps ($\xi_2 = x_2 - X_1$), ou bien la masse $\mu_2 = \frac{m_2(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1}$, tournant autour du centre de gravité général ($\xi_2 = x_2 - X$), car nous avons

$$\frac{x_2 - X}{m_0 + m_1} = \frac{x_2 - X_1}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

Si nous adoptons $\xi_2 = x_2 - X_1$, $\xi_1 = x_1 - X_1$, nous avons la combinaison indiquée par Jacobi (§ II, n° 15 de son *Mémoire sur l'élimination des nœuds*); deux planètes μ_1, μ_2 tournant autour du centre de gravité du soleil m_0 et de la première planète m_1. En appelant m_0 la terre, m_1 la lune, nous aurions un soleil fictif μ_2 et une lune fictive μ_1 tournant tous les deux autour du centre de gravité de la terre et de la lune; μ_2 différerait peu de la masse terrestre m_0, et $\mu_1 = m_1 \frac{m_0 + m_1}{m_0}$ différerait peu de la masse lunaire m_1. Si nous remplacions $x_1 - X_1$ par $x_1 - x_0$ et la valeur ci-dessus de μ_1 par $\frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1}$, nous aurions une lune fictive dont la masse μ_1 serait encore à peu près égale à m_1 et qui tournerait autour de la terre, pendant que le soleil fictif μ_2 tournerait autour du centre de gravité de la terre et de la lune. C'est la combinaison adoptée par M. Weiler en 1866; on voit qu'elle ne se distingue de la précédente que par un changement de notation.

On pourrait maintenant ajouter un quatrième corps m_3, dont la coordonnée serait $\xi_3 = x_3 - X_2$, et la masse fictive $\mu_3 = m_3\left(1 - \frac{m_3}{m}\right)$, en désignant par m la masse totale du système; puis un cinquième corps m_4, avec la coordonnée ξ_4 et la masse fictive μ_4, et ainsi de suite. L'avantage de cette transformation consiste dans la forme des équations (20), qui permet de prendre, en première approximation,

$$x_0 - X = 0, \quad x_1 - X = \xi_1, \ldots, \quad x_n - X = \xi_n.$$

5. Je supposerai que la fonction des forces a la forme ordinaire

$$U = k\sum\frac{m_i m_k}{r_{ik}}$$

où r_{ik} figure la distance mutuelle des masses m_i, m_h, et k la constante de l'attraction. Comme U ne dépend pas des différences des coordonnées, nous avons

$$\sum\frac{dU}{dx} = \sum\frac{dU}{dy} = \sum\frac{dU}{dz} = 0,$$

d'où résultent les trois intégrales qui expriment la conservation du mouvement du centre de gravité,

$$\begin{aligned} mX &= A + Bt, \\ mY &= A' + B't, \\ mZ &= A'' + B''t. \end{aligned}$$

En même temps

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d^2Z}{dt^2} = 0, \\ &m\,\frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{dt^2} = \frac{1}{m}(B^2 + B'^2 + B''^2), \\ &m\,\frac{X\,dY - Y\,dX}{dt} = \frac{1}{m}(AB' - A'B), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si nous nous reportons maintenant à l'identité symbolique

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} S = \frac{1}{m}\sum m_i m_k((x_i - x_k)) &= \sum_0^n m_i((x_i)) - m((X)) \\ &= \sum_0^n m_i((x_i - X)) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)), \end{aligned}\right.$$

nous voyons que nous aurons $((X)) = \text{const.}$, lorsque le symbole $((x))$ représente la force vive ou le mouvement aréolaire, et $((X)) = 0$ quand $((x)) = d^2x\,\delta x$. Il s'ensuit que les intégrales des forces vives et des aires ont lieu pour les variables $x_i - x_h$, $x_i - X$ et ξ_i, avec des constantes qui ne diffèrent que par le terme $m((X))$ des constantes analogues que l'on trouve pour les coordonnées absolues x_i.

Si nous désignons, comme à l'ordinaire, par $2T$ la force vive absolue des $n+1$ corps donnés, et par H la différence $T - U$, le principe des forces vives donne l'intégrale

$$H = h,$$

où h est une constante. Mais si $2T$ représente la force vive des masses m_i, estimée autour de leur centre de gravité, ou bien la force vive des n masses μ, on aura

$$H = h_0,$$

en désignant par h_0 la constante h, diminuée de la demi-force vive du centre de gravité :

$$h_0 = h - \frac{1}{2m}(B^2 + B'^2 + B''^2).$$

En prenant pour origine l'un des corps du système donné, par exemple m_0, on peut tout exprimer par les différences $x_i - x_0$, et l'intégrale des forces vives se présente sous cette forme :

$$\frac{1}{m}\sum m_i m_h \left[\left(\frac{dx_i - dx_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i - dy_h}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i - dz_h}{dt}\right)^2\right] - U = h_0.$$

Soint L, M, N les trois constantes du plan invariable qui passe par le centre de gravité du système donné ; si on fait $L^2 + M^2 + N^2 = K^2$, les rapports $L : K$, $M : K$, $N : K$ sont les cosinus qui déterminent le pôle de ce plan. L'identité (12) donne alors

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{m}\sum m_i m_h[(x_i - x_h)\,d(y_i - x_h) - (y_i - y_h)\,d(x_i - x_h)]\\ &= \sum m_i[(x_i - X)\,d(y_i - Y) - (y_i - Y)\,d(x_i - X)]\\ &= \sum \mu(\xi\,d\eta - \eta\,d\xi) = N\end{aligned}\right.$$

et deux équations analogues pour les plans xz et yz. Le mouvement aréolaire relatif des $n+1$ masses m_i est donc égal au mouvement aréolaire des mêmes masses autour de leur centre de gravité, et au mouvement aréolaire absolu des n masses μ_i. Le plan invariable des masses μ_i est parallèle à celui des masses m_i tournant autour de leur centre de gravité.

Si nous prenons $((x)) = d^2 x\, \partial x$, l'équation (12) montre enfin que

$$dt^2 \partial U = \sum m_i d^2 x_i \partial x_i = \sum m_i d^2 (x_i - X) \partial (x_i - X) = \sum \mu_i d^2 \xi_i \partial \xi_i,$$

la somme comprenant toutes les variables x, y, z. Il s'ensuit qu'on aura

$$\mu_i \frac{d^2 \xi_i}{dt^2} = \frac{dU}{d\xi_i}$$

pour les $3n$ coordonnées ξ, η, ζ, comme on a

$$m_i \frac{d^2 (x_i - X)}{dt^2} = \frac{dU}{d(x_i - X)}$$

pour les $3n + 3$ coordonnées $x - X$, $y - Y$, $z - Z$. Lorsqu'on prend pour variables indépendantes les coordonnées $x_i - x_0$, $y_i - y_0$, $z_i - z_0$, rapportées à l'un des mobiles (m_0), la forme des équations différentielles n'est plus aussi simple. On a, dans ce cas,

$$\frac{d^2(x_i - x_0)}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{dU}{d(x_i - x_0)} + \frac{1}{m_0} \sum_1^n \frac{dU}{d(x_h - x_0)},$$

où l'on peut, *dans la somme*, omettre les termes de U qui dépendent des différences $x_i - x_h = x_i - x_0 - (x_h - x_0)$, parce que leurs dérivées partielles se détruisent si on les ajoute.

Voici enfin une dernière application de l'identité (12). Soient r_i et ρ_i les rayons vecteurs des masses m_i, μ_i, et R celui de la masse m (du centre de gravité); soit r_{ih} la distance de m_i à m_h, et R_i la distance de m_i à m (au centre de gravité). On aura

$$(23) \qquad \frac{1}{m} \sum m_i m_h r_{ih}^2 = \sum_0^n m_i r_i^2 - m R^2 = \sum_0^n m_i R_i^2 = \sum_1^n \mu_i \rho_i^2.$$

Si on supprime les z, les quantités r, R, ρ représentent les projections des rayons vecteurs ou distances sur le plan des xy, et la formule (23) renferme des théorèmes sur les moments d'inertie. Si elles représentent les distances ou rayons vecteurs mêmes, la formule (23), différentiée deux fois, conduit à une équation différentielle très-remarquable.

On a évidemment

$$\frac{1}{2} d^2 \sum mr^2 = d \sum mx\, dx = \sum m (dx^2 + x\, d^2 x),$$

en étendant les deux dernières sommes à toutes les variables x, y, z, ou bien, en vertu des équations du mouvement,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum mr^2 = \sum m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \sum x \frac{dU}{dx}.$$

Or le principe des forces vives donne

$$\sum m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2U + 2h.$$

D'un autre côté, U étant une fonction homogène du degré -1, nous pouvons écrire

$$\delta U + U\delta = 0,$$

en considérant δ comme une facteur constant après avoir développé la variation δU. Il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum mr^2 = 2U + 2h + \frac{\delta U}{\delta} = U + 2h.$$

On a, d'un autre côté,

$$\frac{m}{2} \frac{d^2}{dt^2} R^2 = 2(h - h_0).$$

Donc

$$(24) \quad \frac{1}{2m} \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i m_k r_{ik}^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i R_i^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum \mu_i \rho_i^2 = U + 2h_0 = T_0 + h_0,$$

en désignant par $2T_0$ la force vive des masses μ, ou la force vive des corps m_i, estimée autour du centre de gravité. On déduit encore de là cette équation connue

$$(25) \quad \sum m_i m_k \left(\frac{d^2 r_{ik}^2}{dt^2} - \frac{2km}{r_{ik}}\right) = 4mh_0,$$

qui ne renferme que les distances mutuelles des mobiles. Jacobi en a tiré des conséquences importantes relatives à la stabilité du système solaire. La stabilité exige que les distances r restent finies. Il faut pour

cela que h_0 soit négatif, que les valeurs de $U + 2h_0$ oscillent autour de zéro, celles de la force vive $2T_0$ autour de U. Une valeur positive de h_0 correspond au mouvement hyperbolique, une valeur nulle à des paraboles.

6. En résumé, les équations différentielles du mouvement et les intégrales connues se présentent sous leur aspect le plus simple lorsqu'on fait usage des variables ξ, η, ζ. Le nombre des équations différentielles à intégrer se réduit alors à $3n$ comme lorsqu'on prend pour origine l'un des mobiles, mais sans qu'elles perdent, comme dans ce dernier cas, leur forme si simple. Les intégrales des forces vives et des aires ne renferment, comme les équations différentielles, que les $3n$ inconnues ξ, η, ζ; le problème des $n+1$ corps est donc ramené à un problème du mouvement de n corps. Ce résultat a été obtenu par une élimination à l'aide des trois intégrales du centre de gravité. Mais il y a une différence essentielle entre le problème primitif et le problème transformé : la fonction U ne dépend plus des différences des variables. Il en résulte que les sommes $\sum \frac{dU}{d\xi}$ ne s'annulent pas, et que le principe de la conservation du mouvement du centre de gravité n'a pas lieu pour les masses fictives. Cette circonstance établit une étroite analogie entre le problème transformé et celui du mouvement de n corps autour d'un centre d'attraction fixe.

Toutefois, à moins de supposer une loi d'attraction compliquée, la fonction U, transformée par les ξ, η, ζ, n'a pas la même forme que dans le cas d'un centre fixe; l'analogie se borne à cette remarque, que, dans les deux cas, U ne renferme que les distances mutuelles et les rayons vecteurs des mobiles. Soit ρ_{ik} la distance des masses μ_i, μ_k, et σ_{ik} le cosinus de l'angle formé par les rayons vecteurs ρ_i et ρ_k, nous avons

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho_i^2 &= \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2,\\ \rho_i\rho_k\sigma_{ik} &= \xi_i\xi_k + \eta_i\eta_k + \zeta_i\zeta_k,\\ \rho_{ik}^2 &= \rho_i^2 + \rho_k^2 - 2\rho_i\rho_k\sigma_{ik},\end{aligned}\right.$$

et si on fait $\left(\frac{c_{ih}}{\sqrt{m_i}} - \frac{c_{kh}}{\sqrt{m_k}}\right)\sqrt{\mu_h} = e_h^{(ik)}$, les formules (7) donnent

$$x_i - x_k = \sum^h e_h^{(ik)}\xi_h,$$

d'où

$$(27) \qquad r_{ik}^2 = \left[\sum^{h} e_h^{(ik)} \rho_h \sigma_h\right]^2,$$

formule symbolique où il faut, après développement, faire $\sigma_h \sigma_l = \sigma_{hl}$ et $\sigma_h^2 = \sigma_{hh} = 1$. On a d'ailleurs $2\rho_h \rho_l \sigma_{hl} = \rho_h^2 + \rho_l^2 - \rho_{hl}^2$, ce qui prouve que les distances r_{ik} ne dépendent que des n rayons vecteurs ρ_i et des $\frac{n(n-1)}{2}$ distances ρ_{ik}. On a d'ailleurs

$$\frac{dU}{d\xi_l} = -k \sum^{i,k} \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} e_l^{(ik)} \sum^{h} e_h^{(ik)} \xi_h.$$

7. Il faut maintenant déterminer les coefficients de la transformation générale, de manière à satisfaire aux conditions exprimées par les équations

$$(2) \qquad \sum_{h=0}^{h=n} c_{hi} c_{hk} = 0, \quad \sum_{h=0}^{h=n} c_{hi} c_{hi} = 1,$$

et

$$(6) \qquad c_{h0} = \sqrt{\frac{m_h}{m}}, \quad \sum_{h=0}^{h=n} c_{hi} \sqrt{m_h} = 0,$$

que nous avons établies plus haut.

M. Cayley a montré que les coefficients d'une substitution orthogonale peuvent s'exprimer d'une manière générale par un système de quantités arbitraires. Nos coefficients c sont au nombre de $(n+1)^2$, et les équations (2) ci-dessus représentent

$$n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

conditions; il en résulte que le nombre des quantités arbitraires sera égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, ou bien à $n(n+1)$, s'il existe entre elles $\frac{n(n+1)}{2}$ relations. Je fais ici abstraction des conditions spéciales énoncées par les équations (6), dont il sera question plus tard. Désignons par b_{ih} les

coefficients de la transformation simultanée

$$\sqrt{m_i}\,x_i = \sum_0^n b_{ik}\sqrt{m_k}\,u_k,$$

$$\sqrt{\mu_i}\,\xi_i = \sum_0^n b_{ki}\sqrt{m_k}\,u_k,$$

en supposant que

$$b_{ik} + b_{ki} = 0, \quad b_{ii} = 1.$$

On a d'abord $2u_i = x_i + \xi_i$, et la résolution du système montre que l'on peut prendre

$$(28) \qquad c_{ki} = \frac{2\beta_{ki}}{B}, \quad c_{ii} = \frac{2\beta_{ii}}{B} - 1,$$

en désignant par B le déterminant des b, et par β_{ki} le coefficient de b_{ki} dans B. La transformation prend alors cet aspect :

$$(29) \qquad B(\sqrt{m_i}\,x_i + \sqrt{\mu_i}\,\xi_i) = 2\sum_0^n \beta_{ki}\sqrt{m_k}\,x_k = 2\sum_0^n \beta_{ik}\sqrt{\mu_k}\,\xi_k.$$

Cette formule représente une substitution orthogonale entre les variables $\sqrt{m_i}\,x_i$ d'une part, et $\sqrt{\mu_i}\,\xi_i$ de l'autre. Pour obtenir que ξ_0 soit la coordonnée X du centre de gravité, il faut encore tenir compte des équations (6), c'est-à-dire prendre $c_{h0} = \sqrt{\frac{m_h}{m}}$. Nous ferons désormais $m_0 = 1$, en prenant m_0 pour l'unité des masses, et nous écrirons β à la place de β_{00}, de sorte que β représentera le déterminant mineur

$$\beta = \sum (\pm b_{11}\, b_{22} \ldots b_{nn}).$$

Les équations (6) et (28) donnent alors

$$(30) \qquad \frac{2\beta_{h0}}{B} = \sqrt{\frac{m_h}{m}}, \quad \frac{2\beta}{B} = 1 + \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Ces relations spécialisent en quelque sorte la substitution orthogonale

qui convient au problème des $n+1$ corps. Elles sont au nombre de $n+1$, mais ne représentent que n conditions distinctes, car on a identiquement

$$\sum_0^n c_{h0}^2 = 1 \quad \text{ou bien} \quad \sum_1^n (2\beta_{h0})^2 = B^2 - (2\beta - B)^2,$$

d'où il suit qu'en faisant $\frac{2\beta_{h0}}{B} = \sqrt{\frac{m_h}{m}}$, on aura nécessairement

$$\frac{2\beta}{B} = 1 + \frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Il ne s'ajoute donc que n conditions nouvelles aux $\frac{n(n+1)}{2}$ relations qui existaient déjà entre les $n(n+1)$ quantités b_{hi} dont les indices h,i sont différents l'un de l'autre. Par conséquent, si l'on tient compte de toutes les conditions à remplir, on dispose en réalité de $\frac{n(n-1)}{2}$ arbitraires (d'une seule dans le cas de trois corps). Il est vrai que l'on peut, en outre, considérer comme arbitraires les n masses μ, mais elles n'entrent dans les formules que comme facteurs des carrés des coordonnées; aussi écrirons-nous désormais ξ_i à la place de $\sqrt{\mu_i}\xi_i$, de sorte que les formules de transformation (7) et (8) deviennent

$$(7\ bis) \qquad \sqrt{m_i}(x_i - X) = \sum_{h=1}^{h=n} c_{ih}\xi_h,$$

$$(8\ bis) \qquad \xi_i = \sum_{h=1}^{h=n} c_{hi}\sqrt{m_h}(x_h - x_0).$$

8. Les équations de condition (30) peuvent être remplacées par des relations linéaires entre les quantités b. Nous avons, en vertu des propriétés connues des déterminants,

$$\sum_{h=0}^{h=n} b_{hi}\beta_{hk} = 0, \quad \sum_{h=0}^{h=n} b_{hi}\beta_{hi} = B,$$

d'où, à cause de (28),

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} & b_{ki} + \sum_{h=0}^{h=n} b_{hi}\, c_{hk} = 0, \\ & -1 + \sum_{h=0}^{h=n} b_{hi}\, c_{hi} = 0. \end{aligned}\right.$$

On en déduit, en faisant dans la première $k=0$, dans la seconde $i=0$,

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} & (1+\sqrt{m})\, b_{0i} + \sum_{1}^{n} \sqrt{m_h}\, b_{hi} = 0, \quad \text{pour} \quad i > 0, \\ & 1 - \sqrt{m} + \sum_{1}^{n} \sqrt{m_h}\, b_{h0} = 0. \end{aligned}\right.$$

Il est facile de voir que l'une des équations (32) résulte des n autres, de sorte qu'elles ne représentent que n conditions distinctes. En effet, si nous ajoutons les équations qui correspondent à $i=0, i=1, i=2,\ldots$, après les avoir respectivement multipliées par $1+\sqrt{m}$, $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, ..., il vient

$$1 - m + (1+\sqrt{m})\sum_{1}^{n} \sqrt{m_h}\, b_{h0} + (1+\sqrt{m})\sum_{1}^{n} \sqrt{m_h}\, b_{0h} + \sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n} \sqrt{m_i m_h}\, b_{hi} = 0,$$

équation identique à cause des relations qui existent entre les b.

Le système des formules

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} & b_{ii} = b_{00} = 1, \\ & b_{ih} + b_{hi} = 0, \\ & b_{0i} = -\, b_{i0}, \\ & (1+\sqrt{m})\, b_{0i} = -\sum_{h=1}^{h=n} \sqrt{m_h}\, b_{hi}, \\ & (1+\sqrt{m})\, b_{i0} = 2\sqrt{m_i} - \sum_{h=1}^{h=n} \sqrt{m_h}\, b_{ih}, \end{aligned}\right.$$

où l'on suppose toujours les indices i et h *différents de zéro*, exprime les quantités b_{i0} et b_{0i} par les $n(n-1)$ quantités b_{ih} dont l'indice h diffère

de i. Ces quantités sont assujetties à satisfaire à $\frac{n(n-1)}{2}$ relations linéaires et ne représentent conséquemment que $\frac{n(n-1)}{2}$ arbitraires; je les appellerai néanmoins les *arbitraires*, afin de les distinguer des b_{ii}, b_{0i} et b_{i0}.

On peut exprimer les coefficients de la substitution par les arbitraires seules, en éliminant les b_{0i} et les b_{i0}.

L'équation (30) nous donne d'abord

$$(34) \qquad \begin{cases} (1+\sqrt{m})\,\mathrm{B} = 2\sqrt{m}\,\beta, \\ (1+\sqrt{m})\,\beta_{i0} = \sqrt{m_i}\,\beta. \end{cases}$$

Le déterminant β ne renferme que les arbitraires; il fournirait les coefficients d'une substitution orthogonale du degré n. Nous pouvons le décomposer en déterminants partiels à l'aide de la formule

$$\beta = \sum_1^n b_{ih}\,\mathfrak{b}_{ih},$$

où la somme se prend par rapport à h ou par rapport à i. On déduit β_{0h} de β, et β_{ih} de β_{0h} par les opérations suivantes. D'abord β se change en $(1+\sqrt{m})\,\beta_{0h}$, si la ligne b_{1h}, b_{2h},... est remplacée par

$$-(1+\sqrt{m})\,b_{10}, \quad -(1+\sqrt{m})\,b_{20}, \ldots,$$

ou bien, à cause des formules (33), b_{ph} par

$$-2\sqrt{m_p} + \sqrt{m_1}\,b_{p1} + \sqrt{m_2}\,b_{p2} + \ldots.$$

Le terme $-2\sqrt{m_p}$ donne $-2\sum^p \sqrt{m_p}\,\mathfrak{b}_{ph}$, le terme $\sqrt{m_h}\,b_{ph}$ donne $\sqrt{m_h}\,\beta$, et les autres termes donnent zéro, en vertu d'un théorème connu. Par conséquent

$$(35) \qquad (1+\sqrt{m})\,\beta_{0h} = \sqrt{m_h}\,\beta - 2\sum^p \sqrt{m_p}\,\mathfrak{b}_{ph}.$$

On déduit $(1+\sqrt{m})\,\beta_{ih}$ de β_{0h} en remplaçant dans B la colonne b_{i0}, b_{i1},...

par une colonne

$$-(1+\sqrt{m})\,b_{00}, \quad -(1+\sqrt{m})\,b_{01}, \ldots.$$

En tenant compte de (32) et de (33), cela revient à remplacer b_{i0} par

$$-(1+\sqrt{m}) = -2\sqrt{m} + \sqrt{m_1}\,b_{10} + \sqrt{m_2}\,b_{20} + \ldots,$$

et b_{ip} par

$$\sqrt{m_1}\,b_{1p} + \sqrt{m_2}\,b_{2p} + \ldots.$$

Les termes $\sqrt{m_i}\,b_{ip}$ donnent $\sqrt{m_i}\,\beta_{0h}$, les termes $\sqrt{m_k}\,b_{kp}$, où k diffère de i, donnent zéro; enfin le terme $-2\sqrt{m}$, dans l'expression qui a pris la place de b_{i0}, se trouve multiplié par le coefficient de $-b_{hi}$ dans β. Il en résulte que

$$(1+\sqrt{m})\,\beta_{ih} = \sqrt{m_i}\,\beta_{0h} + 2\sqrt{m}\,\mathfrak{b}_{ih}. \tag{36}$$

Je désignerai à présent par γ_{ih} les coefficients d'une substitution orthogonale du degré n, tirée du déterminant mineur β, de sorte que

$$\gamma_{ih} = \frac{2\,\mathfrak{b}_{ih}}{\beta}, \quad \gamma_{ii} = \frac{2\,\mathfrak{b}_{ii}}{\beta} - 1, \tag{37}$$

et je représenterai par

$$\beta_h = \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{m_i}\,\mathfrak{b}_{ih}$$

ce que devient β lorsque la ligne b_{1h}, b_{2h}, ..., b_{ih}, ... est remplacée par $\sqrt{m_1}$, $\sqrt{m_2}$, ..., $\sqrt{m_i}$, ... On trouve alors que les coefficients c s'expriment facilement à l'aide des γ. En effet, les formules (34), (35), (36) donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{m}\,c_{h0} = \sqrt{m_h}, \\ &-\sqrt{m}\,c_{0h} = \frac{2\,\beta_h}{\beta} - \sqrt{m_h} = \sum_{p=1}^{p=n} \sqrt{m_p}\,\gamma_{ph}, \\ &c_{ih} = \gamma_{ih} + \frac{\sqrt{m_i}}{1+\sqrt{m}}\,c_{0h}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

La substitution orthogonale du degré $n+1$ conduit donc ici à une

autre substitution du degré n : dans le cas de trois corps, c'est une substitution ternaire qui revient à une substitution binaire. On pourrait l'appeler *terno-binaire*. On tire encore de (7 *bis*) et (8 *bis*) :

$$(39)\quad \begin{cases} x_i - X = \dfrac{1}{\sqrt{m_i}} \sum c_{ih}\,\xi_h, \\ x_i - x_k = \dfrac{1}{\sqrt{m_i\,m_k}} \sum (\sqrt{m_k}\,c_{ih} - \sqrt{m_i}\,c_{kh})\,\xi_h, \\ \xi_i = \sum \sqrt{m_h}\,c_{hi}(x_h - x_0), \end{cases}$$

ou bien

$$(40)\quad \begin{cases} x_0 - X = \sum c_{0h}\,\xi_h, \\ x_i - X = \dfrac{1}{\sqrt{m_i}} \sum \gamma_{ih}\,\xi_h + \dfrac{1}{1+\sqrt{m}} \sum c_{0h}\,\xi_h, \\ x_i - x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{m_i}} \sum \gamma_{ih}\,\xi_h - \dfrac{\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \sum c_{0h}\,\xi_h, \\ \xi_i = \sum \gamma_{hi}\sqrt{m_h}(x_h - x_0) + \dfrac{m c_{0i}}{1+\sqrt{m}}(X - x_0), \end{cases}$$

les sommes devant être prises par rapport à h, depuis $h = 1$ jusqu'à $h = n$. On prendra toujours $m_0 = 1$.

Un cas particulier est celui où toutes les arbitraires s'évanouissent. Les quantités b se réduisent alors aux suivantes :

$$b_{ii} = 1, \quad b_{i0} = -\,b_{0i} = \frac{\sqrt{m_i}}{1+\sqrt{m}},$$

et les déterminants mineurs sont nuls ou égaux à l'unité :

$$\beta = 1, \quad \gamma_{ii} = 1, \quad \gamma_{ih} = 0.$$

L'une des formules (40) donne alors, si nous remplaçons ξ_i par $\sqrt{m_i}\,\xi_i$,

$$x_i - x_0 = \xi_i + \frac{1}{1+\sqrt{m}} \sum_1^n m_h\,\xi_h :$$

c'est la transformation par les points canoniques, que nous avons développée au n° 3.

Un autre cas particulier est celui qui a été traité au n° 4, où nous avons obtenu une substitution orthogonale en introduisant les centres de gravité successifs des systèmes M_0, M_1, M_2, ... Il est clair qu'on pourrait aussi arriver à la transformation générale du degré $n+1$ en prenant pour point de départ l'un de ces cas particuliers et en appliquant aux variables spéciales xyz une substitution orthogonale du degré n, de manière que

$$S = \sum_1^n \mathrm{m}_i((\mathrm{x}_i)) = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

Je me bornerai à indiquer plus loin la marche à suivre dans les cas de trois et de quatre corps.

9. Nous allons d'abord appliquer les formules générales au problème des trois corps. Nous avons ici $n=2$, et les arbitraires se réduisent à une seule, $b = b_{12} = -b_{21}$. Donc (*)

$$\beta = 1 + b^2, \quad \mathfrak{b}_{11} = \mathfrak{b}_{22} = 1, \quad \mathfrak{b}_{12} = -\mathfrak{b}_{21} = b,$$
$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \frac{2}{\beta} - 1, \quad \gamma_{12} = -\gamma_{21} = \frac{2b}{\beta}.$$

Les γ_{ih} représentent une substitution orthogonale binaire, et si nous écrivons, pour abréger, γ à la place de γ_{11} et de γ_{22}, γ' à la place de γ_{12} et de $-\gamma_{21}$, nous avons $\gamma^2 + \gamma'^2 = 1$, et nous pouvons prendre $\gamma = \cos\varphi$, $\gamma' = \sin\varphi$, en représentant l'arbitraire par l'angle φ. Les formules (38) donnent alors

$$(41)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\text{Coefficients de} & \\
x_0 - X & \left\{\begin{array}{l}\sqrt{m}\,c_{01} = -\sqrt{m_1}\,\gamma + \sqrt{m_2}\,\gamma',\\ \sqrt{m}\,c_{02} = -\sqrt{m_2}\,\gamma - \sqrt{m_1}\,\gamma'.\end{array}\right.\\
x_1 - X & \left\{\begin{array}{l}(1+\sqrt{m})\sqrt{m}\,c_{11} = (1+\sqrt{m}+m_2)\gamma + \sqrt{m_1 m_2}\,\gamma',\\ (1+\sqrt{m})\sqrt{m}\,c_{12} = -\sqrt{m_1 m_2}\,\gamma + (1+\sqrt{m}+m_2)\gamma',\end{array}\right.\\
x_2 - X & \left\{\begin{array}{l}(1+\sqrt{m})\sqrt{m}\,c_{21} = -\sqrt{m_1 m_2}\,\gamma - (1+\sqrt{m}+m_1)\gamma',\\ (1+\sqrt{m})\sqrt{m}\,c_{22} = (1+\sqrt{m}+m_1)\gamma - \sqrt{m_1 m_2}\,\gamma'.\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

(*) Nous avons toujours accolé les indices h, i sans les séparer par une virgule, nous avons écrit b_{12} pour $b_{1,2}$, etc. Le lecteur ne s'y trompera pas.

$$(42)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Coefficients de} & \\ x_2 - x_1 & \left\{\begin{array}{l} \sqrt{m_1}\, c_{21} - \sqrt{m_2}\, c_{11} = \sqrt{m}\, c_{02}, \\ \sqrt{m_1}\, c_{22} - \sqrt{m_2}\, c_{12} = -\sqrt{m}\, c_{01}, \end{array}\right. \\ x_0 - x_2 & \left\{\begin{array}{l} \sqrt{m_2}\, c_{01} - c_{21} = \sqrt{m}\, c_{12}, \\ \sqrt{m_2}\, c_{02} - c_{22} = -\sqrt{m}\, c_{11}, \end{array}\right. \\ x_1 - x_0 & \left\{\begin{array}{l} c_{11} - \sqrt{m_1}\, c_{01} = \sqrt{m}\, c_{22}, \\ c_{12} - \sqrt{m_1}\, c_{02} = -\sqrt{m}\, c_{21}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

L'inspection de ces tableaux montre que les six coefficients (42), qui servent à exprimer les différences des coordonnées par les $\xi\eta\zeta$, sont *les mêmes* que ceux par lesquels on transforme les coordonnées $x - X$, $y - Y$, $z - Z$, rapportées au centre de gravité, ou, du moins, que ces deux groupes de coefficients ne diffèrent que par des facteurs qui dépendent des masses. Les formules (39) combinées avec (40) donnent, par exemple,

$$x_0 - X = c_{01}\xi_1 + c_{02}\xi_2,$$

$$\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m}}\,(x_2 - x_1) = c_{02}\xi_1 - c_{01}\xi_2,$$

d'où l'on tire

$$(x_0 - X)^2 + \frac{m_1 m_2}{m}(x_2 - x_1)^2 = (c_{01}^2 + c_{02}^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) = \frac{m_1 + m_2}{m}(\xi_1^2 + \xi_2^2).$$

On a des relations analogues pour $(x_1 - X)$ et $(x_0 - x_2)$, pour $(x_2 - X)$ et $(x_1 - x_0)$; elles montrent que notre substitution terno-binaire fournit les trois substitutions binaires contenues dans la formule

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_2^2 &= \frac{mm_0(x_0 - X)^2 + m_1 m_2 (x_1 - x_2)^2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{mm_1(x_1 - X) + m_2 m_0 (x_2 - x_0)^2}{m_2 + m_0} \\ &= \frac{mm_2(x_2 - X)^2 + m_0 m_1 (x_0 - x_1)^2}{m_0 + m_1}, \end{aligned}\right.$$

qui découle aussi directement de (18). On peut remarquer, en outre, que les trois groupes c_{01}, c_{02}; c_{11}, c_{12}; c_{21}, c_{22} dépendent chacun de γ, γ'

par une substitution orthogonale, ce qui s'exprime par l'égalité

$$\gamma^2+\gamma'^2=\frac{m}{m_1+m_2}(c_{01}^2+c_{02}^2)=\frac{m}{1+m_2}(c_{11}^2+c_{12}^2)=\frac{m}{1+m_1}(c_{21}^2+c_{22}^2)=1,$$

qui résulte aussi des relations

$$\sum c_{hi}^2=1,\quad c_{h0}^2=\frac{m_h}{m},$$

en prenant toujours $m_0=1$.

Si nous faisions d'abord $\varphi=0$, $\gamma'=0$, $\gamma=1$, en écrivant $\sqrt{m_1}\,\xi_1$, $\sqrt{m_2}\,\xi_2$ à la place de ξ_1, ξ_2, nous trouverions la transformation par laquelle les planètes m_1, m_2 sont rapportées au point canonique du Soleil m_0. En effet,

$$\sqrt{m}\,(x_0-X)=-(m_1\xi_1+m_2\xi_2),$$
$$x_2-x_1=\xi_2-\xi_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

comme dans (14). Pour examiner de plus près le cas général, j'introduirai les trois angles α_0, α_1, α_2 définis par les équations

$$(44)\qquad \operatorname{tg}\alpha_0=\sqrt{\frac{m_1}{m_2}},\quad \operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\sqrt{m_1m_2}}{1+\sqrt{m}+m_2},\quad \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{\sqrt{m_1m_2}}{1+\sqrt{m}+m_1},$$

et je poserai

$$\alpha_1+\alpha_2=\theta,\quad \alpha_0-\alpha_1=\theta_2,\quad \alpha_0+\alpha_2=\frac{\pi}{2}-\theta_1,$$

d'où

$$\theta+\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2},$$

$$(45)\qquad \operatorname{tg}\theta=\sqrt{\frac{m_1m_2}{m}},\quad \operatorname{tg}\theta_1=\sqrt{\frac{m_2}{mm_1}},\quad \operatorname{tg}\theta_2=\sqrt{\frac{m_1}{mm_2}},$$

$$\sin^2\theta=\frac{m_1m_2}{(1+m_1)(1+m_2)},\quad \cos^2\theta=\frac{m}{(1+m_1)(1+m_2)},$$

$$\sin^2\theta_2=\frac{m_1}{(1+m_2)(m_1+m_2)},\quad \cos^2\theta_2=\frac{mm_2}{(1+m_2)(m_1+m_2)},$$

$$\sin^2\theta_1=\frac{m_2}{(1+m_1)(m_1+m_2)},\quad \cos^2\theta_1=\frac{mm_1}{(1+m_1)(m_1+m_2)}.$$

On trouve alors

$$(46)\quad\begin{cases}\sqrt{\dfrac{m}{m_1+m_2}}\,c_{01}=\sin(\varphi-\alpha_0), & \sqrt{\dfrac{m}{m_1+m_2}}\,c_{02}=-\cos(\varphi-\alpha_0),\\ \sqrt{\dfrac{m}{1+m_2}}\,c_{11}=\cos(\varphi-\alpha_1), & \sqrt{\dfrac{m}{1+m_2}}\,c_{12}=\sin(\varphi-\alpha_1),\\ \sqrt{\dfrac{m}{1+m_1}}\,c_{21}=-\sin(\varphi+\alpha_2), & \sqrt{\dfrac{m}{1+m_1}}\,c_{22}=\cos(\varphi+\alpha_2).\end{cases}$$

Avec ces coefficients on a, par exemple, en rétablissant m_0 pour plus de symétrie,

$$(47)\quad\begin{cases}\sqrt{\dfrac{mm_1}{m_0+m_2}}(x_1-X)=\xi_1\cos(\varphi-\alpha_1)+\xi_2\sin(\varphi-\alpha_1),\\ \sqrt{\dfrac{m_0m_2}{m_0+m_2}}(x_2-x_0)=-\xi_1\sin(\varphi-\alpha_1)+\xi_2\cos(\varphi-\alpha_1),\\ \sqrt{\dfrac{mm_2}{m_0+m_1}}(x_2-X)=-\xi_1\sin(\varphi+\alpha_2)+\xi_2\cos(\varphi+\alpha_2),\\ \sqrt{\dfrac{m_0m_1}{m_0+m_1}}(x_1-x_0)=\xi_1\cos(\varphi+\alpha_2)+\xi_2\sin(\varphi+\alpha_2).\end{cases}$$

Si l'on fait $\alpha_1-\varphi=\psi$, on a $\varphi+\alpha_2=\theta-\psi$, et il vient

$$(48)\quad\begin{cases}\sqrt{\dfrac{m_2}{1+m_2}}(x_2-x_0)=\xi_1\sin\psi+\xi_2\cos\psi,\\ \sqrt{\dfrac{m_1}{1+m_1}}(x_1-x_0)=\xi_1\cos(\theta-\psi)+\xi_2\sin(\theta-\psi).\end{cases}$$

J'écrirai maintenant de nouveau $\sqrt{\mu_1}\,\xi_1$, $\sqrt{\mu_2}\,\xi_2$, à la place de ξ_1, ξ_2, et je poserai

$$(49)\qquad \sqrt{\mu_1}\cos(\theta-\psi)=\sqrt{\frac{m_1}{1+m_1}},\quad \sqrt{\mu_2}\cos\psi=\sqrt{\frac{m_2}{1+m_2}}.$$

Comme on a

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{m_1m_2}}{\sqrt{(1+m_1)(1+m_2)}},$$

la première des équations (48) donne

$$x_2 - x_0 = \xi_2 + \frac{m_1 \xi_1}{1 + m_1} \frac{\sin\psi}{\sin\theta \cos(\theta - \psi)}.$$

On trouve de cette façon

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} x_2 - x_0 &= \xi_2 + \frac{m_1 \xi_1}{1 + m_1} \left[1 - \frac{\tang(\theta - \psi)}{\tang\theta} \right], \\ x_1 - x_0 &= \xi_1 + \frac{m_2 \xi_2}{1 + m_2} \left[1 - \frac{\tang\psi}{\tang\theta} \right]. \end{aligned} \right.$$

Si m_0 représentait le Soleil, m_1, m_2 étant deux planètes, il suffirait de prendre l'angle ψ entre les limites zéro et θ, pour que les seconds termes de ces expressions fussent toujours de petites quantités de l'ordre des masses m_1, m_2 et, par suite, comparables à des perturbations. On pourrait alors, en première approximation, prendre $x_2 - x_0 = \xi_2$ et $x_1 - x_0 = \xi_1$, et les coordonnées ξ_1, ξ_2 seraient celles de deux mouvements elliptiques. En même temps, les masses μ_1, μ_2 différeraient peu de m_1, m_2.

Il n'en serait plus de même si m_0 était la Terre, m_1 la Lune, m_2 le Soleil. Dans ce cas, le second terme de $x_1 - x_0$ ne serait plus très-petit par l'effet du coefficient $\frac{m_2}{1 + m_2}$, dont la valeur serait alors voisine de l'unité; en outre, le rapport $\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_2}$ $\left(\text{et par suite aussi } \frac{\xi_2}{\xi_1}\right)$ pourrait devenir égal à 400. Il faudrait donc alors prendre $\psi = \theta$, afin d'annuler complétement le second terme de $x_1 - x_0$. On aurait de cette manière

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_0 &= \xi_1, & \mu_1 &= \frac{m_1}{1 + m_1}, \\ x_2 - x_0 &= \xi_2 + \frac{m_1}{1 + m_1} \xi_1, & \mu_2 &= \frac{m_2(1 + m_1)}{m}. \end{aligned} \right.$$

C'est notre transformation (19), car, en désignant par X_1 la coordonnée du centre de gravité de la Terre et de la Lune, nous avons

$$x_0 + m_1 x_1 = (1 + m_1) X_1, \quad \text{d'où} \quad \xi_2 = x_2 - X_1,$$

comme dans (19).

On pourrait encore poser

$$\lambda \sin\psi = \varepsilon \sin\theta, \quad \lambda \cos\psi = 1 + \varepsilon \cos\theta, \quad \lambda^2 = 1 + 2\varepsilon \cos\theta + \varepsilon^2,$$

ε étant une quantité arbitraire destinée à remplacer ψ. Les formules (48) et (49) donneraient alors

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_0 &= \xi_1 + \frac{m_2 \xi_2}{1 + m_2} \frac{1}{1 + \varepsilon \cos\theta}, \\ x_2 - x_0 &= \xi_2 + \frac{m_1 \xi_1}{1 + m_1} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \cos\theta}, \\ \mu_1 &= \frac{m_1}{1 + m_1} \left(\frac{\lambda}{1 + \varepsilon \cos\theta} \right)^2, \\ \mu_2 &= \frac{m_2}{1 + m_2} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon + \cos\theta} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

C'est la transformation adoptée par M. Weiler. Pour la théorie de la Lune, on prend $\varepsilon = 0$, en désignant ici par m_2 la Lune, par m_1 le Soleil. Si m_1, m_2 sont deux planètes, m_0 étant le Soleil, on voit que les seconds termes de $x_1 - x_0$ et de $x_2 - x_0$ seront toujours de petites quantités de l'ordre des forces perturbatrices, tant que ε reste positif, quelle que soit d'ailleurs la valeur absolue de cette constante.

10. Nous allons constater que l'on peut aussi arriver à ces formules en partant de la transformation indiquée au n° 4. Si nous écrivons x, y, z à la place de ξ, η, ζ, les formules (19) et (20) donnent, X_1 étant la coordonnée primitive du centre de gravité des deux masses m_0, m_1,

$$\mathrm{x}_1 = x_1 - x_0, \qquad \mathrm{x}_2 = x_2 - X_1,$$
$$\mu_1 = \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1}, \quad \mu_2 = \frac{(m_0 + m_1) m_2}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

On tire de là

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_0 &= \mathrm{x}_1, & x_2 - X_2 &= \frac{m_0 + m_1}{m} \mathrm{x}_2, \\ x_2 - x_0 &= \mathrm{x}_2 + \frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathrm{x}_1, & x_1 - X_2 &= -\frac{m_2}{m} \mathrm{x}_2 + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathrm{x}_1, \\ x_2 - x_1 &= \mathrm{x}_2 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} \mathrm{x}_1, & x_0 - X_2 &= -\frac{m_2}{m} \mathrm{x}_2 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \mathrm{x}_1, \end{aligned} \right.$$

en écrivant toujours m pour $m_0 + m_1 + m_2$. Ces relations peuvent se

présenter sous la forme suivante :

(54)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m_1 m}{m_1 - m}}\;x - x_1 = \sqrt{\mu}\,X,\\
&\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2}}\;x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{\mu_2}\,X_2\sqrt{mm_1} - \sqrt{\mu}\,X\sqrt{mm_2}}{\sqrt{mm_1 - mm_2}},\\
&\sqrt{\frac{m m_2}{m - m_2}}\;x_2 - x = \frac{\sqrt{\mu_2}\,X_2\sqrt{mm_1} - \sqrt{\mu}\,X\sqrt{m_1 m_2}}{\sqrt{mm_1 - m_1 m_2}},\\
&\sqrt{\frac{m m_2}{m_1 - m}}\;x_2 - X_2 = \sqrt{\mu_2}\,X_2,\\
&\sqrt{\frac{m m_1}{m_1 - m_2}}\;x - X_2 = \frac{-\sqrt{\mu_2}\,X_2\sqrt{m m_2} - \sqrt{\mu}\,X\sqrt{mm_1}}{\sqrt{mm_1 - mm_2}},\\
&\sqrt{\frac{m m_1}{m - m_2}}\;x_1 - X_2 = \frac{-\sqrt{\mu_2}\,X_2\sqrt{m_1 m_2} - \sqrt{\mu}\,X\sqrt{mm}}{\sqrt{mm - m_1 m_2}}.
\end{aligned}\right.$$

Si on introduit les angles θ définis par les formules (45), il vient

(55)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2}}\;x_2 - x_1 = \sqrt{\mu_2}\,X_2\cos\theta - \sqrt{\mu}\,X\sin\theta,\\
&\sqrt{\frac{m\, m_2}{m - m_2}}\;x_2 - x = \sqrt{\mu_2}\,X_2\cos\theta - \sqrt{\mu}\,X\sin\theta,\\
&\sqrt{\frac{m m_1}{m_1 - m_2}}\;x - X_2 = -\sqrt{\mu_2}\,X_2\sin\theta - \sqrt{\mu}\,X\cos\theta,\\
&\sqrt{\frac{m m_1}{m - m_2}}\;x_1 - X_2 = -\sqrt{\mu_2}\,X_2\sin\theta - \sqrt{\mu}\,X\cos\theta.
\end{aligned}\right.$$

Je pose maintenant

(56)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\mu}\,X = -\xi_1\cos\theta - \omega - \xi\sin\theta - \omega,\\
&\sqrt{\mu_2}\,X_2 = -\xi_1\sin\theta - \omega - \xi\cos\theta - \omega.
\end{aligned}\right.$$

et je trouve

(57)
$$\left\{\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 - m_2}}\;x_1 - x_2 = \xi_1\cos\theta_2 - \omega - \xi\sin\theta_2 - \omega,\\
&\sqrt{\frac{m\, m_2}{m - m_2}}\;x - x_2 = \xi_1\sin\omega - \xi\cos\omega.
\end{aligned}\right.$$

En même temps

$$\mathrm{S} = \mu_1((\mathrm{x}_1)) + \mu_2((\mathrm{x}_2)) = ((\xi_0)) + ((\xi_1)).$$

Les formules (57) coïncident avec (48), si on avance tous les indices d'une unité en écrivant 1, 2, 0 pour 0, 1, 2, et en prenant $m_0 = 1$, $\theta_0 = \theta$.

Pour un système de quatre corps m_0, m_1, m_2, m_3, nous aurions

$$\mathrm{S} = \sum_1^3 \mu_i((\mathrm{x}_i))$$

et

$$\mathrm{x}_3 = x_3 - \mathrm{X}_2, \quad \mu_3 = \frac{(m_0 + m_1 + m_2)m_3}{m_0 + m_1 + m_2 + m_3},$$

les valeurs de x_1, x_2, μ_1, μ_2 étant les mêmes que précédemment dans le cas des trois corps. Les formules (20) donnent les expressions des coordonnées $x - \mathrm{X}$ par les trois x, et si nous introduisons les angles ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 définis par les équations

$$(58) \quad \begin{cases} \tang\vartheta_0 = \sqrt{\dfrac{m_3 m_0}{m(m_1+m_2)}}, \quad \tang\vartheta_1 = \sqrt{\dfrac{m_3 m_1}{m(m_0+m_2)}}, \\ \tang\vartheta_2 = \sqrt{\dfrac{m_3 m_2}{m(m_0+m_1)}}, \end{cases}$$

où $m = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$, il vient

$$(59) \quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{mm_3}{m-m_3}}(x_3 - \mathrm{X}_3) = \sqrt{\mu_3}\,\mathrm{x}_3, \\ \sqrt{\dfrac{mm_2}{m-m_2}}(x_2 - \mathrm{X}_3) = -\sqrt{\mu_3}\,\mathrm{x}_3\sin\vartheta_2 + \sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\cos\vartheta_2, \\ \sqrt{\dfrac{mm_1}{m-m_1}}(x_1 - \mathrm{X}_3) = -\sqrt{\mu_3}\,\mathrm{x}_3\sin\vartheta_1 - (\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\sin\theta - \sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\cos\theta)\cos\vartheta_1, \\ \sqrt{\dfrac{mm_0}{m-m_0}}(x_0 - \mathrm{X}_3) = -\sqrt{\mu_3}\,\mathrm{x}_3\sin\vartheta_0 - (\sqrt{\mu_2}\,\mathrm{x}_2\sin\theta_1 + \sqrt{\mu_1}\,\mathrm{x}_1\cos\theta_1)\cos\vartheta_0. \end{cases}$$

Les formules (55) montrent que les deux parenthèses qui entrent dans les expressions de $x_1 - \mathrm{X}_3$ et de $x_0 - \mathrm{X}_3$ représentent les coordonnées $x_1 - \mathrm{X}_2$ et $x_0 - \mathrm{X}_2$, comme x_3 représente $x_3 - \mathrm{X}_2$. On pour-

rait maintenant transformer les variables x_1, x_2, x_3 au moyen d'une substitution orthogonale ternaire qui renfermerait trois angles arbitraires φ, ψ, χ; les nouvelles variables dépendraient alors des quatre coordonnées $x_0 - X$, $x_1 - X$, $x_2 - X$, $x_3 - X$ par une substitution quaternaire de l'espèce définie par les formules (40).

11. Il y a quelque intérêt à comparer ces formules à celles de Jacobi. En introduisant dans ces dernières les changements de notation indispensables, nous avons, pour trois corps,

$$\begin{aligned}
x_0 &= X + a_{01}\xi_1 + a_{02}\xi_2,\\
x_1 &= X + a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2,\\
x_2 &= X + a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2,\\
\hline
mX &= m_0 x_0 + m_1 x_1 + m_2 x_2,\\
\xi_1 &= \alpha_{01} x_0 + \alpha_{11} x_1 + \alpha_{21} x_2,\\
\xi_2 &= \alpha_{02} x_0 + \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2,
\end{aligned}$$

avec ces conditions pour les coefficients a et α :

$$\begin{array}{ll}
m_0 a_{01} + m_1 a_{11} + m_2 a_{21} = 0, & \alpha_{01} + \alpha_{11} + \alpha_{21} = 0,\\
m_0 a_{02} + m_1 a_{12} + m_2 a_{22} = 0, & \alpha_{02} + \alpha_{12} + \alpha_{22} = 0,\\
m_0 a_{01} a_{02} + m_1 a_{11} a_{12} + m_2 a_{21} a_{22} = 0, & \dfrac{\alpha_{01}\alpha_{02}}{m_0} + \dfrac{\alpha_{11}\alpha_{12}}{m_1} + \dfrac{\alpha_{21}\alpha_{22}}{m_2} = 0.
\end{array}$$

Si on fait, avec Jacobi,

$$\begin{array}{ll}
\gamma_0 = a_{11} - a_{21}, & \delta_0 = a_{12} - a_{22},\\
\gamma_1 = a_{21} - a_{01}, & \delta_1 = a_{22} - a_{02},\\
\gamma_2 = a_{01} - a_{11}, & \delta_2 = a_{02} - a_{12},
\end{array}$$

ce qui donne

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 = 0, \quad \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 = 0,$$

il vient

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= \gamma_0 \xi_1 + \delta_0 \xi_2,\\
x_2 - x_0 &= \gamma_1 \xi_1 + \delta_1 \xi_2,\\
x_0 - x_1 &= \gamma_2 \xi_1 + \delta_2 \xi_2,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire par élimination

$$\begin{aligned}
(\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)\xi_1 &= \delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2,\\
(\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2)\xi_2 &= \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,
\end{aligned}$$

Les six coefficients γ, δ ne diffèrent donc des six α que par le facteur $\gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2$. Il s'ensuit qu'ils devront aussi vérifier l'équation

$$\frac{\gamma_0\delta_0}{m_0} + \frac{\gamma_1\delta_1}{m_1} + \frac{\gamma_2\delta_2}{m_2} = 0$$

ou bien

$$\frac{1}{m_0}(\gamma_1+\gamma_2)(\delta_1+\delta_2) + \frac{1}{m_1}\gamma_1\delta_1 + \frac{1}{m_2}\gamma_2\delta_2 = 0.$$

On peut la résoudre en posant

$$\gamma_1 = -\frac{m_1\gamma_2}{1+m_1+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{m}}, \quad \delta_2 = -\frac{m_2\delta_1}{1+m_2+\varepsilon\sqrt{m}},$$

où ε est une quantité arbitraire. En prenant $\gamma_2 = -1$, $\delta_1 = 1$, on aurait

$$x_1 - x_0 = \xi_1 + \frac{m_2\xi_2}{1+m_2+\varepsilon\sqrt{m}},$$
$$x_2 - x_0 = \xi_2 + \frac{m_1\xi_1}{1+m_1+\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{m}},$$

formules qui coïncident avec (52), si nous écrivons

$$\varepsilon\sqrt{\frac{1+m_2}{1+m_1}}$$

à la place de ε.

L'équation $m_0 a_{01} + m_1 a_{11} + m_2 a_{21} = 0$ donne encore

$$\begin{aligned} m a_{01} &= m_1\gamma_2 - m_2\gamma_1, & m a_{02} &= m_1\delta_2 - m_2\delta_1,\\ m a_{11} &= m_2\gamma_0 - m_0\gamma_2, & m a_{12} &= m_2\delta_0 - m_0\delta_2,\\ m a_{21} &= m_0\gamma_1 - m_1\gamma_0, & m a_{22} &= m_0\delta_1 - m_1\delta_0, \end{aligned}$$

m étant toujours la somme $m_0 + m_1 + m_2$. On tire de là, en multipliant par $m_0 a_{01}$, $m_1 a_{11}$, $m_2 a_{21}$, et ajoutant,

$$\mu_1 = m_0 a_{01}^2 + m_1 a_{11}^2 + m_2 a_{21}^2 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m}\left(\frac{\gamma_0^2}{m_0} + \frac{\gamma_1^2}{m_1} + \frac{\gamma_2^2}{m_2}\right),$$
$$\mu_2 = m_0 a_{02}^2 + m_1 a_{12}^2 + m_2 a_{22}^2 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m}\left(\frac{\delta_0^2}{m_0} + \frac{\delta_1^2}{m_1} + \frac{\delta_2^2}{m_2}\right),$$
$$\mu_1\mu_2 = \frac{m_0 m_1 m_2}{m}(\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1)^2 = \frac{m m_1 m_2}{m_0}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})^2.$$

12. Nous avons vu que le problème des $n+1$ corps peut toujours se réduire à un problème du mouvement de n corps fictifs à l'aide d'une substitution orthogonale d'une certaine nature que nous avons représentée par la formule symbolique

$$\mathrm{S} = \sum_1^n \mu_i((\xi_i)).$$

Les distances r qui entrent dans la fonction des forces s'expriment alors par les rayons vecteurs ρ des corps fictifs et par les cosinus σ_{ik} des angles (ik) compris entre deux rayons vecteurs ρ_i, ρ_k, au moyen de la formule (27)

$$r_{ik}^2 = \left[\sum^h e_h^{(ik)} \rho_h \sigma_h\right]^2,$$

dans laquelle il faut, après développement du carré, poser $\sigma_h \sigma_l = \sigma_{hl}$ et $\sigma_h^2 = \sigma_{hh} = 1$. On a d'ailleurs (26)

$$\begin{gathered}\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,\\ \rho_i \rho_k \sigma_{ik} = \xi_i \xi_k + \eta_i \eta_k + \zeta_i \zeta_k.\end{gathered}$$

La fonction des forces U est une fonction homogène du degré -1 par rapport aux coordonnées et distances. On aura donc, en tenant compte des formules (26) et (27),

$$\mathrm{U} + \sum^i \rho_i \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_i} = 0, \tag{60}$$

et

$$\rho_i \frac{d\mathrm{U}}{d\rho_i} = \xi_i \frac{d\mathrm{U}}{d\xi_i} + \eta_i \frac{d\mathrm{U}}{d\eta_i} + \zeta_i \frac{d\mathrm{U}}{d\zeta_i}. \tag{61}$$

On trouve encore

$$\xi_i \frac{d\mathrm{U}}{d\eta_i} - \eta_i \frac{d\mathrm{U}}{d\xi_i} = \sum^h \frac{\xi_i \eta_h - \eta_i \xi_h}{\rho_i \rho_h} \frac{d\mathrm{U}}{d\sigma_{ih}}, \tag{62}$$

et, par suite,

$$\sum^i \left(\xi_i \frac{d\mathrm{U}}{d\eta_i} - \eta_i \frac{d\mathrm{U}}{d\xi_i}\right) = 0. \tag{63}$$

Cette dernière formule donnerait les intégrales des aires. L'expression

$\xi_i\eta_h - \eta_i\xi_h$, qui figure dans (62), est le double de la projection du triangle formé par les rayons vecteurs ρ_i, ρ_h. Par conséquent, si nous désignons par α_{ih}, β_{ih}, γ_{ih} les cosinus des angles que la normale au plan de ce triangle fait avec les trois axes,

$$\xi_i\eta_h - \eta_i\xi_h = \rho_i\rho_h \sin(ih)\gamma_{ih}.$$

Cette expression étant substituée dans (62), il vient, en tenant compte des équations du mouvement et en remplaçant $d\sigma_{ih}$ par $-\sin(ih)\,d(ih)$,

$$(64) \qquad \mu_i \frac{d}{dt}\left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right) = -\sum^h \gamma_{ih} \frac{dU}{d(ih)}.$$

Soient encore α_i, β_i, γ_i les trois cosinus qui déterminent le plan de l'orbite instantanée du corps μ_i, et soit f_i le produit de μ_i par le double de l'aire ou de la vitesse aréolaire du rayon vecteur ρ_i, on aura

$$\mu_i\left(\xi_i \frac{d\eta_i}{dt} - \eta_i \frac{d\xi_i}{dt}\right) = f_i\gamma_i, \ldots,$$

et les intégrales des aires pourront s'écrire de cette manière :

$$(65) \qquad \sum f_i\alpha_i = L, \quad \sum f_i\beta_i = M, \quad \sum f_i\gamma_i = N.$$

Ces trois équations signifient que le mouvement aréolaire dans un plan quelconque est constant. Si on fait $L^2 + M^2 + N^2 = K^2$, on a encore

$$(66) \qquad \sum f^2 + 2\sum f_i f_h s_{ih} = K^2,$$

où s_{ih} est le cosinus de l'inclinaison relative des deux orbites f_i, f_h. On peut considérer K comme la résultante de n forces égales aux quantités f et perpendiculaires aux plans des orbites; la direction de cette résultante représente la normale au plan invariable du système.

L'équation (64) donne à présent

$$(67) \qquad \frac{d(f_i\gamma_i)}{dt} = -\sum^h \gamma_{ih} \frac{dU}{d(ih)},$$

et l'on a deux équations analogues pour α_i et β_i. Si nous les ajoutons

après les avoir multipliées par α_i, β_i, γ_i, nous avons

$$\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2=1,$$
$$\alpha_i\,d\alpha_i+\beta_i\,d\beta_i+\gamma_i\,d\gamma_i=0,$$
$$\alpha_i\alpha_{ih}+\beta_i\beta_{ih}+\gamma_i\gamma_{ih}=\cos\theta_{ih},$$

où θ_{ih} est l'inclinaison de l'orbite f_i sur le plan du triangle (ρ_i, ρ_h); donc

$$\frac{df_i}{dt}=-\sum^{h}\cos\theta_{ih}\frac{dU}{d(ih)}. \tag{68}$$

Prenons maintenant le plan invariable pour celui des xy, en faisant $L=M=0$, $N=K$, et soient : λ_i les inclinaisons des plans des aires sur le plan invariable; ϑ_i les angles compris entre leurs intersections avec ce plan et l'axe des x, ou ce qu'on appelle les *longitudes des nœuds;* υ_i les distances des planètes aux nœuds ascendants; on aura

$$\gamma_i=\cos\lambda_i,\quad \beta_i=\sin\lambda_i\cos\vartheta_i,\quad \alpha_i=\sin\lambda_i\sin\vartheta_i,$$

et le principe des aires donnera

$$\sum f_i\cos\lambda_i=K,\quad \sum f_i\sin\lambda_i\cos\vartheta_i=0,\quad \sum f_i\sin\lambda_i\sin\vartheta_i=0. \tag{69}$$

Les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ auront pour expression

$$\left\{\begin{aligned}\xi&=\rho(\cos\vartheta\cos\upsilon-\sin\vartheta\sin\upsilon\cos\lambda),\\ \eta&=\rho(\sin\vartheta\cos\upsilon+\cos\vartheta\sin\upsilon\cos\lambda),\\ \zeta&=\rho\sin\upsilon\sin\lambda.\end{aligned}\right. \tag{70}$$

Le cosinus de l'angle (ih) compris entre deux rayons vecteurs ρ_i, ρ_h est donné par la formule

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_{ih}=\;&\cos\upsilon_i\cos\upsilon_h\cos(\vartheta_i-\vartheta_h)\\ &+\sin\upsilon_i\sin\upsilon_h[\sin\lambda_i\sin\lambda_h+\cos\lambda_i\cos\lambda_h\cos(\vartheta_i-\vartheta_h)]\\ &+(\cos\upsilon_i\sin\upsilon_h\cos\lambda_h-\sin\upsilon_i\cos\upsilon_h\cos\lambda_i)\sin(\vartheta_i-\vartheta_h).\end{aligned}\right. \tag{71}$$

Considérons maintenant le quadrilatère sphérique dont les côtés sont υ_i, υ_h, (ih) et $\vartheta_i-\vartheta_h$, es angles λ_i, λ_h, θ_{ih} et θ_{hi}. Si le rayon ρ_i se déplace seul dans son orbite, les inclinaisons et les nœuds restant con-

stants, ainsi que v_h, la variation correspondante de l'arc (ih) sera la projection de $-dv_i$ sur le grand cercle de (ih), de sorte que

$$\frac{d(ih)}{dv_i} = -\cos\theta_{ih}.$$

Par conséquent

$$\frac{df_i}{dt} = \sum^h \frac{dU}{d(ih)}\,\frac{d(ih)}{dv_i} = \frac{dU}{dv_i},$$

ou bien, puisque T ne renferme pas les v,

(72) $$\frac{df_i}{dt} = -\frac{dH}{dv_i}.$$

13. A la place des trois composantes rectangulaires des vitesses ω, j'introduirai maintenant les deux composantes prises, l'une dans la direction du rayon, l'autre perpendiculairement au rayon et dans le plan de l'orbite instantanée f. Soit δv le déplacement angulaire du rayon vecteur ρ pendant le temps dt, les deux composantes de la vitesse ω seront

$$\frac{d\rho}{dt} \quad \text{et} \quad \rho\,\frac{\delta v}{dt}.$$

On aura d'ailleurs

$$f = \mu\rho^2\frac{\delta v}{dt}, \quad \text{ou bien} \quad \mu\rho\,\frac{\delta v}{dt} = \frac{f}{\rho},$$

et en faisant $\mu\frac{d\rho}{dt} = \varpi$, on pourra considérer ϖ et $\frac{f}{\rho}$ comme les deux composantes de la quantité de mouvement $\mu\omega$. L'expression des forces vives devient à présent

(73) $$2T = \sum \frac{1}{\mu}\left(\varpi^2 + \frac{f^2}{\rho^2}\right).$$

Si on différentie l'équation $\rho\, d\rho = \xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta$, on trouve, en ayant égard à (61),

$$\frac{1}{\mu}\varpi^2 + \rho\,\frac{d\varpi}{dt} = \mu\omega^2 + \rho\,\frac{dU}{d\rho},$$

ou bien, en remplaçant la vitesse ω par ses deux composantes,

(74) $$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{1}{\mu}\frac{f^2}{\rho^3} + \frac{dU}{d\rho}.$$

Le premier terme de cette expression n'est autre chose que $-\frac{dT}{d\rho}$; par suite

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{dH}{d\rho}. \tag{75}$$

On a de même $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\varpi}{\mu} = \frac{dT}{d\varpi}$, d'où

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}. \tag{76}$$

On voit que les rayons vecteurs et les vitesses radiales multipliées par les masses constituent un système de variables conjuguées.

L'équation (24) donnerait encore

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum \mu\rho^2 = T + h_0 = U + 2h_0, \tag{24}$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\sum \rho\varpi = \sum \frac{1}{\mu}\left(\varpi^2 + \frac{f^2}{\rho^2}\right) + h_0.$$

14. Il faut maintenant chercher les équations différentielles pour les inclinaisons λ, les distances aux nœuds υ et les longitudes des nœuds ϑ.

Le plan invariable étant celui des xy, nous avons $\cos\lambda_i = \gamma_i$, et, par (67) et (68),

$$f_i \sin\lambda_i \frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{d(f_i\gamma_i)}{dt} + \cos\lambda_i \frac{df_i}{dt} = \sum (\gamma_{ih} - \cos\lambda_i \cos\theta_{ih}) \frac{dU}{d(ih)}.$$

Or, γ_{ih} est le cosinus de l'inclinaison du plan (ρ_i, ρ_h) sur le plan invariable; donc

$$\gamma_{ih} = \cos\lambda_i \cos\theta_{ih} + \sin\lambda_i \sin\theta_{ih} \cos\upsilon_i,$$

et

$$f_i \frac{d\lambda_i}{dt} = \cos\upsilon_i \sum^{h} \sin\theta_{ih} \frac{dU}{d(ih)}.$$

Supposons que, dans l'angle tétraèdre formé par deux rayons vecteurs et leurs nœuds, l'arête ρ_i se déplace seule en décrivant un cône circulaire d'amplitude υ_i autour de son nœud; le plan de l'orbite

tournera d'un angle $d\lambda_i$, le rayon vecteur ρ_i décrira l'arc $\sin\upsilon_i\,d\lambda_i$, qui fera avec le plan de (ih) un angle égal à $90° - \theta_{ih}$, et la distance (ih) croîtra d'une quantité égale à la projection de $\sin\upsilon_i\,d\lambda_i$ sur (ih). Donc

$$\frac{d(ih)}{d\lambda_i} = \sin\upsilon_i \sin\theta_{ih}.$$

Par conséquent

$$f_i \tan\upsilon_i \frac{d\lambda_i}{dt} = \sum \frac{dU}{d(ih)} \frac{d(ih)}{d\lambda_i} = \frac{dU}{d\lambda_i}. \tag{77}$$

La quantité $\frac{dU}{d\lambda_i} d\lambda_i$ représente l'accroissement que U prend lorsque le plan f_i tourne autour de son nœud d'un angle $d\lambda_i$, les distances aux nœuds, les différences des nœuds et les inclinaisons, hormis λ_i, restant constantes.

Cherchons maintenant les équations différentielles qui déterminent les deux éléments υ et ϑ.

La variation totale de υ se compose du déplacement angulaire $\delta\upsilon$ du rayon vecteur ρ et de la quantité $\Delta\upsilon$, dont υ s'accroît par suite de la rotation du plan de l'orbite autour du rayon vecteur. Comme cette rotation n'affecte pas la latitude, on trouvera $\Delta\upsilon$ en considérant ζ comme une constante, ou en égalant à zéro la variation du produit $\sin\upsilon\sin\lambda$, ce qui donne

$$\tan\lambda_i\,\Delta\upsilon_i + \tan\upsilon_i\,d\lambda_i = 0. \tag{78}$$

L'arc $\Delta\upsilon_i$ est d'ailleurs la projection de $-d\vartheta_i$ sur le grand cercle de υ_i; d'où il suit que

$$\Delta\upsilon_i + \cos\lambda_i\,d\vartheta_i = 0, \tag{79}$$

et

$$d\vartheta_i = \tan\upsilon_i \frac{d\lambda_i}{\sin\lambda_i}. \tag{80}$$

Par conséquent

$$\left\{\begin{aligned} f_i \frac{d\vartheta_i}{dt} &= -\frac{dU}{d\cos\lambda_i}, \\ f_i \frac{\Delta\upsilon_i}{dt} &= \cos\lambda_i \frac{dU}{d\cos\lambda_i}. \end{aligned}\right. \tag{81}$$

La vitesse angulaire $\frac{\delta v}{dt}$ était

$$\frac{\delta v}{dt} - \frac{f}{\mu\rho^2} = \frac{d\mathrm{T}}{df};$$

par suite, en ajoutant δv à Δv,

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{df_i} + \frac{\cos\lambda_i}{f_i}\frac{d\mathrm{U}}{d\cos\lambda_i}. \tag{82}$$

15. Nous pouvons maintenant réunir en tableau les différents résultats obtenus dans les n^{os} **12, 13** et **14**.

Pour les rayons vecteurs ρ et les vitesses radiales $\rho' = \frac{\varpi}{\mu}$, nous avons trouvé

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{d\varpi} = \frac{1}{\mu}\varpi,$$

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{d\rho} = \frac{1}{\mu}\frac{f^2}{\rho^3} + \frac{d\mathrm{U}}{d\rho},$$

la force vive étant exprimée par

$$2\mathrm{T} = \sum \frac{1}{\mu}\left(\varpi^2 + \frac{f^2}{\rho^2}\right).$$

Nous avons ensuite, pour les aires ou vitesses aréolaires f,

$$\frac{df_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dv_i} = -\sum^{h}\cos\theta_{ih}\frac{d\mathrm{U}}{d(ih)};$$

pour les inclinaisons λ,

$$f_i\frac{d\lambda_i}{dt} = \operatorname{cotang} v_i \frac{d\mathrm{U}}{d\lambda_i} = \cos v_i \sum^{h}\sin\theta_{ih}\frac{d\mathrm{U}}{d(ih)};$$

pour les distances aux nœuds v,

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{d\mathrm{T}}{df_i} + \frac{\cos\lambda_i}{f_i}\frac{d\mathrm{U}}{d\cos\lambda_i};$$

pour les longitudes des nœuds ϑ,

$$f_i\frac{d\vartheta_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{U}}{d\cos\lambda_i};$$

en même temps, pour chaque orbite,

$$d\upsilon = \delta\upsilon + \Delta\upsilon,$$
$$\frac{\delta\upsilon}{dt} = \frac{dT}{df} = \frac{f}{\mu\rho^2},$$
$$\Delta\upsilon = -\cos\lambda\, d\vartheta,$$
$$d\vartheta = \operatorname{tang}\upsilon \frac{d\lambda}{\sin\lambda}.$$

Si l'on introduisait, à l'exemple de M. Weiler, une fonction perturbatrice

$$R = U - \sum \frac{k_h \mu_h}{\rho_h}, \tag{83}$$

où les constantes k_h sont encore indéterminées, on aurait

$$\frac{dR}{d(ih)} = \frac{dU}{d(ih)}, \quad \frac{dR}{d\rho} = \frac{dU}{d\rho} + \frac{k\mu}{\rho^2};$$

par conséquent, en vertu de (74),

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{f^2}{\mu^2\rho^3} - \frac{k}{\rho^2} + \frac{1}{\mu}\frac{dR}{d\rho}. \tag{84}$$

Pour assimiler cette équation à celle d'une orbite elliptique de demi-paramètre p, on poserait $f^2 = \mu^2 pk$, ce qui donnerait

$$\frac{d\rho^2}{dt^2} = \frac{pk}{\rho^3} - \frac{k}{\rho^2} + \frac{1}{\mu}\frac{dR}{d\rho}. \tag{85}$$

Les lois connues du mouvement elliptique donnent encore, en désignant par a le demi-grand axe et par ω la vitesse,

$$\omega^2 = \frac{2k}{\rho} - \frac{k}{a}.$$

Il s'ensuit que

$$T = \sum \frac{k\mu}{\rho} - \sum \frac{k\mu}{2a},$$

et le principe des forces vives donne, en tenant compte de (83),

$$R + \sum \frac{k\mu}{2a} + h_0 = 0. \tag{86}$$

Le principe des aires donne, en même temps,

$$(87)\qquad \sum \mu\alpha\sqrt{pk} = \mathrm{L},\quad \sum \mu\beta\sqrt{pk} = \mathrm{M},\quad \sum \mu\gamma\sqrt{pk} = \mathrm{N},$$

et l'équation (72) devient

$$(88)\qquad \mu\sqrt{k}\,\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{d\mathrm{R}}{d\upsilon}.$$

Enfin,

$$(89)\qquad \frac{1}{a^2}\frac{da}{dt} = \frac{1}{\rho^2}\frac{dp}{dt} + \frac{2}{\mu k}\frac{d\mathrm{R}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

16. Dans le problème des trois corps, les intégrales des aires sont

$$f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2 = \mathrm{L},$$
$$f_1\beta_1 + f_2\beta_2 = \mathrm{M},$$
$$f_1\gamma_1 + f_2\gamma_2 = \mathrm{N};$$

d'où il résulte que la normale au plan invariable représente la direction de la résultante de deux forces f_1, f_2 qui s'exerceraient suivant les normales aux plans des aires, et que la valeur de cette résultante est K. Il s'ensuit aussi que la normale au plan invariable est perpendiculaire à l'intersection des orbites, ou que celles-ci se coupent dans le plan invariable. On aura donc $\vartheta_1 = \vartheta_2$; les deux orbites ont le même nœud, et le principe des aires donne

$$(90)\qquad \begin{cases} f_1\sin\lambda_1 + f_2\sin\lambda_2 = 0, \\ f_1\cos\lambda_1 + f_2\cos\lambda_2 = \mathrm{K}; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(91)\qquad f_1 = \frac{\mathrm{K}\sin\lambda_2}{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)},\quad f_2 = \frac{\mathrm{K}\sin\lambda_1}{\sin(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$(92)\qquad \begin{cases} \cos\lambda_1 = \dfrac{\mathrm{K}^2 + f_1^2 - f_2^2}{2\mathrm{K}f_1},\quad \cos\lambda_2 = \dfrac{\mathrm{K}^2 - f_1^2 + f_2^2}{2\mathrm{K}f_2}, \\ \cos(\lambda_1 - \lambda_2) = \dfrac{\mathrm{K}^2 - f_1^2 - f_2^2}{2f_1f_2}. \end{cases}$$

L'inclinaison relative des orbites est égale à la différence $\lambda_1 - \lambda_2$, et si nous écrivons σ pour cos (1, 2), nous avons

$$(93)\qquad \sigma = \cos\upsilon_1\cos\upsilon_2 + \sin\upsilon_1\sin\upsilon_2\cos(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Les relations (91) nous permettent d'écrire, à la place de (77) et de (81):

$$(94)\quad \begin{cases} \dfrac{f_1 f_2}{\sin\lambda_1}\dfrac{d\lambda_1}{dt} = -\mathrm{K}\cos\upsilon_1 \sin\upsilon_2 \dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}, \\ \dfrac{f_1 f_2}{\sin\lambda_2}\dfrac{d\lambda_2}{dt} = -\mathrm{K}\sin\upsilon_1 \cos\upsilon_2 \dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}, \\ f_1 f_2 \dfrac{d\vartheta}{dt} = -\mathrm{K}\sin\upsilon_1 \sin\upsilon_2 \dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}. \end{cases}$$

L'équation (72) donnerait encore

$$(95)\quad \begin{cases} \dfrac{df_1}{dt} = \dfrac{d\sigma}{d\upsilon_1}\dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}, \\ \dfrac{df_2}{dt} = \dfrac{d\sigma}{d\upsilon_2}\dfrac{d\mathrm{U}}{d\sigma}. \end{cases}$$

Enfin, on tirerait de (74) et de (24):

$$(96)\quad \begin{cases} \mu_1 \dfrac{d^2\rho_1}{dt^2} = \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{f_1^2}{\rho_1^3} + \dfrac{d\mathrm{U}}{d\rho_1}, \\ \mu_2 \dfrac{d^2\rho_2}{dt^2} = \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{f_2^2}{\rho_2^3} + \dfrac{d\mathrm{U}}{d\rho_2}, \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(\mu_1\rho_1^2 + \mu_2\rho_2^2) = 2\mathrm{U} + 4h_0. \end{cases}$$

Entre les dérivées partielles de U il existe la relation suivante, déjà indiquée par M. Weiler :

$$\rho^2 \frac{d^2\mathrm{U}}{d\rho^2} + 2\rho\frac{d\mathrm{U}}{d\rho} + (1-\sigma^2)\frac{d^2\mathrm{U}}{d\sigma^2} - 2\sigma\frac{d\mathrm{U}}{d\sigma} = 0.$$

Mais les relations (91) montrent que l'on peut aussi introduire f_1, f_2 comme variables indépendantes à la place des inclinaisons λ_1, λ_2. On a d'abord

$$\frac{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}{df_1} = -\frac{\mathrm{K}\cos\lambda_1}{f_1 f_2} = -\frac{\cos\lambda_1}{f_1}\frac{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}{d\cos\lambda_1};$$

par suite :

$$\frac{\cos\lambda_1}{f_1}\frac{d\mathrm{U}}{d\cos\lambda_1} = \frac{\cos\lambda_1}{f_1}\frac{d\mathrm{U}}{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{d\cos(\lambda_1-\lambda_2)}{d\cos\lambda_1} = -\frac{d\mathrm{U}}{df_1}.$$

L'équation (82) devient alors

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dT}{df} - \frac{dU}{df} = \frac{dH}{df}.$$

Le problème des trois corps se trouve ainsi ramené à l'intégration du système canonique de huit équations différentielles du premier ordre que voici :

$$H = \frac{1}{2\mu_1}\left(\varpi_1^2 + \frac{f_1^2}{\rho_1^2}\right) + \frac{1}{2\mu_2}\left(\varpi_2^2 + \frac{f_2^2}{\rho_2^2}\right) - U.$$

$$(97)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\rho_1}{dt} &= \frac{dH}{d\varpi_1}, & \frac{d\varpi_1}{dt} &= -\frac{dH}{d\rho_1},\\
\frac{d\rho_2}{dt} &= \frac{dH}{d\varpi_2}, & \frac{d\varpi_2}{dt} &= -\frac{dH}{d\rho_2},\\
\frac{dv_1}{dt} &= \frac{dH}{df_1}, & \frac{df_1}{dt} &= -\frac{dH}{dv_1},\\
\frac{dv_2}{dt} &= \frac{dH}{df_2}, & \frac{df_2}{dt} &= -\frac{dH}{dv_2}.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations n'en représentent que sept si nous éliminons dt; on peut même dire qu'elles se réduisent à six à cause de l'intégrale des forces vives, $H = h$. Après l'intégration de ce système, le temps et la longitude du nœud se trouveraient par des quadratures. On a vu, en effet, que le nœud a disparu des équations différentielles; on pourra le déterminer à part à l'aide des équations

$$d\vartheta = \operatorname{tang} v_1 \frac{d\lambda_1}{\sin\lambda_1} = \operatorname{tang} v_2 \frac{d\lambda_2}{\sin\lambda_2}.$$

On a d'ailleurs aussi

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{f}\frac{dU}{d\cos\lambda}, \quad \frac{df}{dt} = \frac{dU}{dv},$$

d'où

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{f}\frac{dU}{d\sigma}\frac{d\sigma}{d\cos\lambda}, \quad \frac{df}{dt} = \frac{dU}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dv}, \quad \frac{d(f_1+f_2)}{dt} = \frac{dU}{d\sigma}\left(\frac{d\sigma}{dv_1} + \frac{d\sigma}{dv_2}\right).$$

Or

$$\frac{1}{f_1}\frac{d\sigma}{d\cos\lambda_1} = \frac{1}{f_1}\sin v_1 \sin v_2 \frac{d\cos(\lambda_1 - \lambda_2)}{d\cos\lambda_1} = \frac{K\sin v_1 \sin v_2}{f_1 f_2},$$

$$\frac{d\sigma}{dv_1} + \frac{d\sigma}{dv_2} = \sin(v_1 + v_2)[-1 + \cos(\lambda_1 - \lambda_2)] = \sin(v_1 + v_2)\frac{K^2 - (f_1 + f_2)^2}{2 f_1 f_2},$$

par conséquent :

$$(98)\quad \vartheta = \int \frac{2\mathrm{K}\sin\upsilon_1\sin\upsilon_2}{\sin(\upsilon_1+\upsilon_2)}\frac{d(f_1+f_2)}{\mathrm{K}^2-(f_1+f_2)^2} = \int \frac{\sin\upsilon_1\sin\upsilon_2}{\sin(\upsilon_1+\upsilon_2)}\, d\log\frac{f_1+f_2+\mathrm{K}}{f_1+f_2-\mathrm{K}}.$$

Si l'on regarde le nœud des orbites comme leur intersection mutuelle, les équations (97) ne renferment plus aucune trace du plan invariable, elles ne renferment que les rayons vecteurs et les plans des orbites; le plan invariable n'entre en scène que par l'équation (98), qui représente une quadrature.

17. Chez Jacobi, les équations différentielles du problème des trois corps sont présentées sous la forme que voici :

$$\text{I.}\quad \operatorname{tang}\upsilon_1\frac{d\lambda_1}{\sin\lambda_1} = \operatorname{tang}\upsilon_2\frac{d\lambda_2}{\sin\lambda_2} = d\vartheta,$$

$$\text{II.}\quad \operatorname{tang}\upsilon_1\frac{d\lambda_1}{\operatorname{tang}\lambda_1} + d\upsilon_1 = \frac{\mathrm{K}}{\mu_1}\frac{\sin\lambda_2}{\sin(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{dt}{\rho_1^2},$$

$$\text{III.}\quad \operatorname{tang}\upsilon_2\frac{d\lambda_2}{\operatorname{tang}\lambda_2} + d\upsilon_2 = \frac{\mathrm{K}}{\mu_2}\frac{\sin\lambda_1}{\sin(\lambda_1-\lambda_2)}\frac{dt}{\rho_2^2},$$

$$\text{IV.}\quad \frac{\mathrm{K}\sin\lambda_2\, d\lambda_1}{\cos\upsilon_1\sin\upsilon_2\sin^2(\lambda_1-\lambda_2)} = \frac{d\mathrm{U}}{d\cos(1,2)}\,dt,$$

$$\text{V.}\quad \mu_1\left(\frac{d\rho_1}{dt}\right)^2 + \mu_2\left(\frac{d\rho_2}{dt}\right)^2 + \frac{\mathrm{K}}{\sin^2(\lambda_1-\lambda_2)}\left(\frac{\sin^2\lambda_2}{\mu_1\rho_1^2} + \frac{\sin^2\lambda_1}{\mu_2\rho_2^2}\right) = 2\mathrm{U} + 2h_0,$$

$$\text{VI.}\quad \frac{d^2}{dt^2}(\mu_1\rho_1^2 + \mu_2\rho_2^2) = 2\mathrm{U} + 4h_0.$$

Jacobi dit que le problème des trois corps se trouve ainsi réduit à l'intégration de six équations, dont cinq du premier et une du second ordre, et à une quadrature. « Par suite, ajoute-t-il, l'on a fait cinq intégrations. Les intégrales connues n'étant qu'au nombre de quatre, on pourra donc dire que l'on a fait une intégration de plus dans le système du monde. » Cette conclusion paraît difficile à justifier, car, ainsi que l'a déjà fait remarquer M. Cayley, la quadrature par laquelle on détermine la longitude du nœud ϑ doit toujours compter pour une équation différentielle tant que le système de six équations n'a pas été intégré (*).

(*) *Report of the British Association*, 32$^{\text{d}}$ *meeting*, Londres, 1863, p. 215.

Les douze équations du premier ordre d'où dépend le problème lorsqu'on fait usage des coordonnées rectangulaires se réduisent à sept par les quatre intégrales connues et par l'élimination de dt. Si, dans le système d'équations adopté par Jacobi, on considère $\frac{d\rho_1}{dt}$ et $\frac{d\rho_2}{dt}$ comme deux variables indépendantes, et l'équation V comme une intégrale, on peut remplacer V et VI par les quatre équations du premier ordre

$$\frac{d\rho_1}{dt} = \rho'_1, \quad \frac{d\rho_2}{dt} = \rho'_2, \quad \frac{d\rho'_1}{dt} = \mathrm{R}_1, \quad \frac{d\rho'_2}{dt} = \mathrm{R}_2,$$

qui sont contenues dans la formule 25 du § 4 du Mémoire de Jacobi, formule qui donne l'expression de $\frac{d^2\rho_1}{dt^2}$. Le système

$$\frac{d\lambda_1}{\mathrm{A}} = \frac{d\lambda_2}{\mathrm{B}} = \frac{d\upsilon_1}{\mathrm{C}} = \frac{d\upsilon_2}{\mathrm{D}} = \frac{d\rho_1}{\mathrm{E}} = \frac{d\rho_2}{\mathrm{F}} = \frac{d\rho'_1}{\mathrm{G}} = \frac{d\rho'_2}{\mathrm{H}} \; (= dt)$$

représente alors sept équations du premier ordre, avec une intégrale (celle des forces vives), et les quadratures *virtuelles* qui donnent le nœud et le temps. On pourrait aussi, avec M. Cayley, conserver l'équation VI en l'écrivant de cette manière :

$$\frac{d\Theta}{dt} = \mathrm{U} - 2h_0,$$

où

$$\Theta = \mu_1\rho_1\frac{d\rho_1}{dt} + \mu_2\rho_2\frac{d\rho_2}{dt},$$

et profiter de l'équation V pour exprimer $\frac{d\rho_1}{dt}$ et $\frac{d\rho_2}{dt}$ en fonction des sept variables $\lambda_1, \lambda_2, \upsilon_1, \upsilon_2, \rho_1, \rho_2, \Theta$. Le système de Jacobi prendrait alors cet aspect :

$$\frac{d\lambda_1}{\mathrm{A}} = \frac{d\lambda_2}{\mathrm{B}} = \frac{d\upsilon_1}{\mathrm{C}} = \frac{d\upsilon_2}{\mathrm{D}} = \frac{d\rho_1}{\mathrm{E}} = \frac{d\rho_2}{\mathrm{F}} = \frac{d\Theta}{\mathrm{G}} \; (= dt),$$

et se réduirait, par conséquent, à six équations du premier ordre *sans* intégrale. On arriverait au même résultat en faisant, avec M. Weiler, $\sqrt{\mu_1}\,\rho_1 = r\cos\psi$, $\sqrt{\mu_2}\,\rho_2 = r\sin\psi$, d'où $\Theta = r\frac{dr}{dt}$. En résumé, on voit

que Jacobi aurait été en droit de dire que, grâce à la transformation imaginée par lui, le problème des trois corps se réduisait à l'intégration de six équations différentielles du premier ordre et à deux quadratures. Les équations I à IV de son tableau définitif, et la formule 25 du § 4 montrent que les dérivées par rapport au temps des huit variables ρ_1, ρ_2, ρ'_1, ρ'_2, λ_1, λ_2, v_1, v_2 ne renferment pas d'autres inconnues que ces variables elles-mêmes.

18. Le procédé de Jacobi revient, comme nous l'avons vu, à éliminer par le principe des aires *le nœud des deux orbites* ou leur intersection commune avec le plan invariable. En substituant les aires f aux inclinaisons λ, j'ai fait disparaître des équations différentielles la dernière trace du plan invariable, de sorte qu'on ne détermine d'abord que le mouvement dans les deux orbites, dont l'intersection mutuelle sert de repère.

On pourrait de la même manière éliminer *le nœud du plan des deux corps*, c'est-à-dire son intersection avec le plan invariable. Le plan des deux corps, ou plan des vecteurs ρ_1, ρ_2, se confond toujours avec le *plan des trois corps*, si l'origine des coordonnées $\xi\eta\zeta$ est prise dans ce plan. On arrive ainsi à ne faire figurer dans les équations différentielles que le mouvement des trois corps *dans leur plan*. En effet, le principe des aires nous dit que deux forces égales aux aires f_1 et f_2 et perpendiculaires aux orbites des deux corps fictifs ont une résultante K invariable en grandeur et en direction. En d'autres termes, les normales f_1, f_2 aux orbites sont les côtés d'un parallélogramme dont la diagonale est la normale K au plan invariable. Soit encore P la normale au plan des trois corps. Si l'on mène par la normale P trois plans qui passent par les normales f_1, f_2, K, ces plans seront évidemment perpendiculaires aux intersections du plan des trois corps avec les orbites et avec le plan invariable, c'est-à-dire aux rayons vecteurs ρ_1, ρ_2 et au nœud N du plan des trois corps, et si on les fait tourner de 90 degrés autour de P, ils passeront par ρ_1, ρ_2 et N. Or, ces trois plans renferment les côtés et la diagonale du parallélogramme f_1, f_2, K, lequel les suit dans leur rotation autour de la normale P, de manière que les angles (P, f_1), (P, f_2), (P, K) restent toujours les mêmes. Ces trois angles, que je désignerai par θ_1, θ_2 et I, représentent

donc toujours les inclinaisons des plans des orbites et du plan invariable par rapport au plan des trois corps; seulement la droite f_1 est maintenant dans le plan (P, ρ_1), la droite f_2 dans le plan (P, ρ_2), la diagonale K dans le plan (P, N). Si nous projetons le parallélogramme sur la normale P, nous avons

$$K \cos I = f_1 \cos\theta_1 + f_2 \cos\theta_2. \tag{99}$$

Si nous le projetons sur le plan des trois corps, la projection forme un parallélogramme dont les côtés $f_1 \sin\theta_1$ et $f_2 \sin\theta_2$ coïncident respectivement avec ρ_1 et ρ_2, et dont la diagonale $K \sin I$ tombe sur le nœud N. Il s'ensuit que les quantités $f_1 \sin\theta_1$, $f_2 \sin\theta_2$, c'est-à-dire les deux composantes des vitesses aréolaires qui sont perpendiculaires au plan des trois corps, peuvent s'exprimer par $K \sin I$ et par les angles que les rayons vecteurs ρ_1, ρ_2 forment avec le nœud N. On a, en effet,

$$\frac{f_1 \sin\theta_1}{\sin u_2} = -\frac{f_2 \sin\theta_2}{\sin u_1} = \frac{K \sin I}{\sin(1, 2)}, \tag{100}$$

en désignant par u_1, u_2 les distances des rayons vecteurs au nœud N de leur plan, et par $(1, 2) = u_2 - u_1$ l'angle compris entre ρ_1 et ρ_2. Or, $K \sin I$ peut s'exprimer par $K \cos I$ ou par la somme des composantes $f_1 \cos\theta_1$, $f_2 \cos\theta_2$ qui représentent le mouvement aréolaire dans le plan même des trois corps. Il s'ensuit que ces deux composantes et les angles u_1, u_2 suffisent à exprimer les composantes $f_1 \sin\theta_1$, $f_2 \sin\theta_2$, et par suite les aires f_1, f_2 elles-mêmes. On a, par exemple,

$$\begin{aligned} f_1^2 &= f_1^2 \cos^2\theta_1 + \frac{K^2 \sin^2 I}{\sin^2(1, 2)} \sin^2 u_2 \\ &= f_1^2 \cos^2\theta_1 + \frac{\sin^2 u_2}{\sin^2(1, 2)} [K^2 - (f_1 \cos\theta_1 + f_2 \cos\theta_2)^2]. \end{aligned}$$

La force vive du système peut donc s'exprimer par les rayons vecteurs ρ, les vitesses radiales ρ', les distances au nœud u et le mouvement aréolaire $f \cos\theta$ dans le plan des trois corps. La fonction des forces ne renferme que les rayons ρ et l'angle $(1, 2)$, qui est la différence $u_2 - u_1$. Il en résulte que la fonction $H = T - U$ peut être exprimée par les huit variables ρ_1, ρ_2, ϖ_1, ϖ_2, u_1, u_2, $f_1 \cos\theta_1$, $f_2 \cos\theta_2$, et on trouve que l'on peut former un système de huit équations qui ne renferme que le mou-

vement des rayons vecteurs dans leur plan. C'est là le résultat obtenu par Edmond Bour dans son Mémoire sur le Problème des trois corps (*). Si l'on pose avec lui

$$\begin{aligned} &q_1 = \rho_1, \quad q_2 = \rho_2, \quad p_1 = \varpi_1, \qquad p_2 = \varpi_2, \\ &q_3 = u_1, \quad q_4 = u_2, \quad p_3 = f_1 \cos\theta_1, \quad p_4 = f_2 \cos\theta_2, \end{aligned}$$

l'expression de la force vive devient

$$(101) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\mathrm{T} &= \frac{1}{m_1} p_1^2 + \frac{1}{m_2} p_2^2 + \frac{p_3^2}{m_1 q_1^2} + \frac{p_4^2}{m_2 q_2^2} \\ &\quad + \frac{\mathrm{K}^2 - (p_3 + p_4)^2}{m_1 m_2 q_1^2 q_2^2} \, \frac{m_1 q_1^2 \sin^2 q_3 + m_2 q_2^2 \sin^2 q_4}{\sin^2(q_3 - q_4)}. \end{aligned} \right.$$

Le dernier terme disparait si le mouvement a lieu dans un plan, qui est alors le plan invariable. On peut aussi remplacer q_3, q_4, p_3, p_4 par leurs sommes et différences en faisant

$$\begin{aligned} &n_3 = q_3 - q_4 = (1, 2), \quad n_4 = q_3 + q_4, \\ &l_3 = \frac{1}{2}(p_3 - p_4), \qquad l_4 = \frac{1}{2}(p_3 + p_4) = \frac{1}{2}\mathrm{K} \cos \mathrm{I}. \end{aligned}$$

É. Bour démontre que ces variables forment un système canonique, de sorte que le problème se ramène encore ici à l'intégration de huit équations du premier ordre. Pour mieux montrer les rapports qui existent entre ces nouvelles variables et celles que j'ai employées jusqu'ici, j'écrirai les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\cos(1, 2) = \cos\upsilon_1 \cos\upsilon_2 + \sin\upsilon_1 \sin\upsilon_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2), \\ &\cos \mathrm{I} \sin(1, 2) = \cos\upsilon_1 \sin\upsilon_2 \cos\lambda_2 - \cos\upsilon_2 \sin\upsilon_1 \cos\lambda_1, \\ &\sin\theta_1 \sin(1, 2) = \sin\upsilon_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_2), \quad \sin \mathrm{I} \sin q_3 = \sin\upsilon_1 \sin\lambda_1, \\ &\sin\theta_2 \sin(1, 2) = \sin\upsilon_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_2), \quad \sin \mathrm{I} \sin q_4 = \sin\upsilon_2 \sin\lambda_2. \end{aligned}$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXXVI[e] Cahier, 1856, p. 50. Le tableau de la page 54, où l'auteur réunit les valeurs définitives de ses variables, renferme deux erreurs : il faut, dans les expressions de p_3 et de p_4, remplacer les facteurs $\frac{1}{\psi}$ et $\frac{1}{\psi_1}$ par $\upsilon\varphi$ et $\upsilon_1\varphi_1$ respectivement.

On a encore

$$f_1^2 = p_3^2 + \frac{K^2 - (p_3 + p_4)^2}{\sin^2(q_3 - q_4)} \sin^2 q_4, \ldots,$$

$$\operatorname{tang} v_1 = \frac{f_1 \sin(q_3 - q_4) \sin q_3}{p_4 \sin q_4 + p_3 \sin q_3 \cos(q_3 - q_4)}, \ldots.$$

19. Pour le mouvement des trois corps dans un plan, on aurait

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad f_1 + f_2 = K, \quad (1, 2) = v_2 - v_1;$$

la fonction H ne renfermerait donc que les six variables ρ_1, ρ_2, ϖ_1, ϖ_2, $(1, 2)$ et f_1 ou f_2. On aurait

$$\frac{df_1}{dt} = -\frac{df_2}{dt} = -\frac{dH}{d(1, 2)} \quad \text{et} \quad \frac{d(1, 2)}{dt} = \frac{dH}{df_1} - \frac{dH}{df_2},$$

ou bien, en posant $f_1 - f_2 = 2\varphi$,

$$(102) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{dH}{d(1, 2)}, \quad \frac{d(1, 2)}{dt} = \frac{dH}{d\varphi}.$$

Le nombre des variables indépendantes se réduirait ainsi à six, et on aurait en outre l'intégrale des forces vives

$$H = \frac{1}{2\mu_1}\varpi_1^2 + \frac{1}{2\mu_2}\varpi_2^2 + \frac{1}{2\mu_1}\left(\frac{\frac{1}{2}K + \varphi}{\rho_1}\right)^2 + \frac{1}{2\mu_2}\left(\frac{\frac{1}{2}K - \varphi}{\rho_2}\right)^2 - U = h_0.$$

Si l'on désigne par H_0 ce que devient H lorsqu'on y fait $\varphi = 0$, l'élimination donne

$$\frac{d(1, 2)}{dt} = \sqrt{2(h_0 - H_0)\left(\frac{1}{\mu_1\rho_1^2} + \frac{1}{\mu_2\rho_2^2}\right) + \frac{K^2}{4}\left(\frac{1}{\mu_1\rho_1^2} - \frac{1}{\mu_2\rho_2^2}\right)^2}.$$

On peut encore de la même manière remplacer φ dans les expressions de $\frac{d\varpi_1}{dt}$ et de $\frac{d\varpi_2}{dt}$, et le problème du mouvement de trois corps dans un plan se trouve alors réduit à l'intégration des quatre équations simultanées du premier ordre

$$(103) \qquad \frac{d\rho_1}{\frac{1}{\mu_1}\varpi_1} = \frac{d\rho_2}{\frac{1}{\mu_2}\varpi_2} = \frac{d\varpi_1}{R_1} = \frac{d\varpi_2}{R_2} = \frac{d(1, 2)}{R_3} (= dt),$$

où R_1, R_2, R_3 sont des fonctions des cinq variables $\rho_1, \rho_2, \varpi_1, \varpi_2, (1, 2)$. Tout le reste reviendrait à des quadratures. L'avantage de cette réduction est cependant bien mince, vu la complication des dénominateurs.

20. Pour terminer, je ferai voir comment les systèmes canoniques peuvent être obtenus par la méthode d'Hamilton. Soit Ω la longitude du nœud des trois corps, I étant l'inclinaison de leur plan. La rotation de ce plan peut être composée d'une rotation $d\mathrm{I}$ autour du nœud et d'une rotation $\sin \mathrm{I}\, d\Omega$ autour d'un axe perpendiculaire au nœud, ou bien de deux rotations correspondantes autour de deux axes ρ et (ρ), qui font avec le nœud les angles u et $90° + u$. La dernière représente la quantité $\frac{f \sin\theta}{\mu\rho^2}$ dont le rayon vecteur ρ sort du plan primitif des trois corps; il s'ensuit, si nous désignons par Ω', I' les dérivées de Ω, I, que

$$(104) \qquad \mu\rho^2(\Omega' \sin \mathrm{I} \cos u - \mathrm{I}' \sin u) = f \sin\theta.$$

La dérivée u' s'obtient en ajoutant à l'angle $\frac{f\cos\theta}{\mu\rho^2}$, que ρ décrit dans le plan des trois corps, la quantité $-\Omega' \cos \mathrm{I}$, qui provient de la rotation du plan autour de l'axe perpendiculaire au nœud; donc

$$(105) \qquad \mu\rho^2(\Omega' \cos \mathrm{I} + u') = f \cos\theta.$$

Les quatre relations que l'on déduit de ces formules, en donnant aux variables les indices 1 et 2, permettent d'exprimer H par les quantités ρ, ρ', u, u' et $\mathrm{I}, \mathrm{I}', \Omega'$; mais les trois dernières s'éliminent par les intégrales des aires. En effet, les formules (100) et (104) donnent

$$(106) \qquad \Omega' = \frac{\mathrm{K}}{\sin^2(u_1 - u_2)}\left(\frac{\sin^2 u_1}{\mu_2 \rho_2^2} + \frac{\sin^2 u_2}{\mu_1 \rho_1^2}\right) = \frac{1}{\mathrm{K}\sin^2 \mathrm{I}} \sum \frac{f^2 \sin^2\theta}{\mu\rho^2}.$$

De même, (99) et (105) donnent

$$(107) \qquad \sum \mu\rho^2(\Omega' \cos \mathrm{I} + u') = \mathrm{K} \cos \mathrm{I}.$$

On peut donc écrire

$$(108) \qquad 2\mathrm{T} = \sum \mu\rho'^2 + \sum \mu\rho^2(\Omega' \cos \mathrm{I} + u')^2 + \sum \mu\rho^2(\Omega' \sin \mathrm{I} \cos u - \mathrm{I}' \sin u)^2,$$

ou bien

$$2T = \sum \mu\rho'^2 + \sum \mu\rho^2(\Omega' \cos I + u')^2 + \Omega' K \sin^2 I. \tag{108 bis}$$

Si nous prenons pour T l'expression (108), les intégrales des aires peuvent s'écrire

$$\frac{dT}{d\Omega'} = K, \quad \frac{dT}{dI'} = 0, \quad \frac{dT}{dI} = 0, \tag{109}$$

et la troisième conserve cette forme, si nous remplaçons (108) par (108 *bis*). Il s'ensuit qu'il est permis d'éliminer Ω', I', I par les intégrales des aires, dans l'application de la méthode d'Hamilton. Soient p_1, p_2, p_3, p_4 les dérivées partielles de T par rapport à ρ'_1, ρ'_2, u'_1, u'_2, on aura

$$p_1 = \mu_1\rho'_1, \quad p_2 = \mu_2\rho'_2, \quad p_3 = \mu_1\rho_1^2(\Omega' \cos I + u'_1), \quad p_4 = \mu_2\rho_2^2(\Omega' \cos I + u'_2);$$

par conséquent

$$2T = \frac{p_1^2}{\mu_1} + \frac{p_2^2}{\mu_2} + \frac{p_3^2}{\mu_1\rho_1^2} + \frac{p_4^2}{\mu_2\rho_2^2} + \frac{K^2 - (p_3 + p_4)^2}{K}\Omega',$$

la quantité Ω' étant toujours la fonction définie par (106). On voit que les variables p_1, p_2 sont les conjuguées de ρ_1, ρ_2, et p_3, p_4 celles de u_1, u_2. La longitude du nœud Ω s'obtient par une quadrature à l'aide de la formule (106).

On peut encore remplacer les variables u_1, u_2, p_3, p_4 par leurs sommes et différences

$$2l_3 = p_3 - p_4, \qquad 2l_4 = p_3 + p_4 = K \cos I,$$
$$n_3 = u_1 - u_2 = (1, 2), \qquad n_4 = u_1 + u_2,$$

et les variables l_3, l_4 sont alors les conjuguées de n_3, n_4. Cela se démontre directement, en substituant dans la formule (108), $\frac{1}{2}n'_4 \pm \frac{1}{2}n'_3$ à la place de u'; on trouve alors que l_3 et l_4 sont les dérivées partielles de T par rapport à n'_3 et n'_4. La variable n_4 représente l'azimut de la bissectrice de l'angle (1, 2).

M. Brioschi (*) a établi ces formules d'une manière différente.

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 710.

En prenant pour axes mobiles la normale P au plan des trois corps et les deux bissectrices de l'angle ω formé par les vecteurs ρ_1, ρ_2, M. Brioschi arrive à exprimer T par les variables ρ_1, ρ_2, ρ'_1, ρ'_2, ω, ω', et par les rotations du système autour des trois axes mobiles, lesquelles dépendent de I, I', Ω', φ, φ' (I étant toujours l'inclinaison du plan des trois corps, $\varphi = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ la longitude du nœud comptée dans ce plan, Ω la longitude du nœud dans le plan invariable). Il introduit alors les dérivées p_1, p_2, q, de T par rapport à ρ'_1, ρ'_2, ω', et ayant éliminé I', Ω', φ' par les intégrales des aires, il forme avec les six variables ρ_1, ρ_2, ω, p_1, p_2, q un système canonique. M. Brioschi ne s'aperçoit pas que φ et $K \cos I$ sont conjugués, et que ω, q, 2φ, $\frac{1}{2} K \cos I$ sont les variables n_3, l_3, n_4, l_4 de Bour.

21. On peut d'ailleurs éliminer le nœud sans recourir à la transformation de Jacobi; c'est une remarque qui a déjà été faite par M. Sylvester (*). Voici comment nous y arriverons. Proposons-nous de trouver les coordonnées x, y des trois corps dans leur plan, avant de connaître la position de ce plan par rapport au plan invariable (elle sera donnée plus tard par l'inclinaison I et par la longitude du nœud Ω). Prenons le nœud pour axe des x, et l'origine au centre de gravité; nous aurons $\sum mx = 0$, $\sum my = 0$. Le déplacement du nœud dans le plan des trois corps étant égal à $\Omega' \cos I$, il est facile de voir que les vitesses des corps, estimées suivant les axes des x et des y, s'expriment par $x' - y\Omega' \cos I$ et $y' + x\Omega' \cos I$. La composante normale au plan des trois corps est $x\Omega' \sin I - y I'$; par conséquent,

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} 2T = & \sum m(x' - y\Omega' \cos I)^2 \\ & + \sum m(y' + x\Omega' \cos I)^2 + \sum m(x\Omega' \sin I - y I')^2. \end{aligned} \right.$$

Les intégrales des aires peuvent être présentées sous la forme (109),

(*) A la fin du Mémoire intitulé *On the motion of a rigid body* (*Philosophical Transactions*, 1866). M. Sylvester n'a pas publié la méthode par laquelle il obtient ce résultat.

les plans de projection étant alors le plan invariable et deux plans perpendiculaires, menés par les axes mobiles des x et des y. Si nous projetons sur le plan des trois corps et sur deux plans perpendiculaires qui passent par les axes des x et des y, il vient

$$(111)\qquad \begin{cases} \Omega' \cos I \sum m(x^2+y^2) + \sum m(xy'-yx') = K \cos I, \\ \Omega' \sin I \sum mx^2 - I' \sum mxy = K \sin I, \\ \Omega' \sin I \sum mxy - I' \sum my^2 = 0. \end{cases}$$

Il résulte des deux dernières équations de ce groupe que la force vive qui provient de la composante normale s'exprime par $\Omega' K \sin^2 I$, comme nous l'avons déjà trouvé plus haut; par conséquent

$$(112)\qquad 2T = \sum m(x' - y\Omega' \cos I)^2 + \sum m(y' + x\Omega' \cos I)^2 + \Omega' K \sin^2 I.$$

Les mêmes équations donnent pour Ω' la valeur suivante :

$$(113)\qquad \Omega' = \frac{MK}{m_1 m_2 m_3} \frac{\sum my^2}{4\Delta^2},$$

où M est la somme des trois masses, et Δ l'aire du triangle des trois corps. On a d'ailleurs $\frac{2\Delta}{M} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{m_3} = \frac{y_2 x_3 - y_3 x_2}{m_1} = \frac{y_3 x_1 - y_1 x_3}{m_2}$.

La variation de Ω est donc proportionnelle au moment d'inertie du système autour de la ligne des nœuds, divisé par le carré du triangle des trois corps; elle devient infinie pour $\Delta = 0$, parce que le plan des trois corps cesse d'être déterminé quand ces corps se trouvent sur une ligne droite. Ce cas doit être exclu de notre analyse. En outre des variables Ω', I' et I, qu'il est permis d'éliminer par les intégrales des aires, comme je l'ai déjà dit plus haut, l'expression de la force vive renferme les douze variables x, y, x', y', dont le nombre se réduit à huit par les quatre équations $\sum mx = 0$, $\sum mx' = 0$, ... Si donc nous supposons x_3, y_3, x'_3, y'_3 éliminées, les coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2 formeront un système canonique avec $\frac{dT}{dx'_1}, \frac{dT}{dy'_1}, \frac{dT}{dx'_2}, \frac{dT}{dy'_2}$. Pour obtenir

ces dérivées partielles de T, nous devons différentier l'expression (112) en traitant Ω' et I comme des constantes. Au lieu d'éliminer x'_3, y'_3, nous pouvons d'ailleurs tenir compte des équations de condition par deux multiplicateurs α, β, en ajoutant à T l'expression

$$\alpha \sum mx' + \beta \sum my'.$$

On trouve de cette manière

$$(114) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{dT}{dx'} = m(x' - y\,\Omega' \cos I + \alpha), \\ q = \dfrac{dT}{dy'} = m(y' + x\,\Omega' \cos I + \beta). \end{cases}$$

Si nous ajoutons les trois p, il vient $\sum p = M\alpha$; de même $\sum q = M\beta$. On a ensuite

$$(115) \qquad \sum (qx - py) = K \cos I,$$

et finalement

$$(116) \qquad 2T = \sum \frac{p^2 + q^2}{m} - \frac{\left(\sum p\right)^2 + \left(\sum q\right)^2}{M} + \Omega' K - \frac{\Omega'}{K}\left[\sum (qx - py)\right]^2.$$

Or nous pouvons choisir α et β de manière que $p_3 = q_3 = 0$; il ne reste alors dans T que les huit variables canoniques x_1, x_2, y_1, y_2, p_1, p_2, q_1, q_2, si nous substituons pour Ω' l'expression

$$(117) \qquad \Omega' = K \frac{M(m_1 y_1^2 + m_2 y_2^2) - m_1 m_2 (y_1 - y_2)^2}{M\, m_1 m_2 (y_1 x_2 - y_2 x_1)^2},$$

qui se déduit de (113). Nous avons dès lors

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dH}{dp}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dx}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dH}{dq}, \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{dH}{dy},$$

c'est-à-dire sept équations du premier ordre, dont on connaît une intégrale, $H = h$. L'inclinaison I est donnée par la formule (115), la longitude Ω se trouve par une quadrature. Les variables p, q sont ici les vitesses relatives des corps m_1, m_2 par rapport à m_3, car nous avons

$\frac{p_1}{m_1} = x'_1 - x'_3 - (y_1 - y_3)\Omega' \cos I = - \mathrm{x}'_2 + \mathrm{y}_2 \Omega' \cos I$, en désignant par $\mathrm{x}_1 = x_2 - x_3$, $\mathrm{x}_2 = x_3 - x_1, \ldots$ les coordonnées relatives des trois corps dans leur plan.

22. Les coordonnées relatives x, y forment à leur tour des systèmes canoniques avec les vitesses $x' - y\Omega' \cos I$, $y' + x\Omega' \cos I$, des trois corps par rapport au centre de gravité. On peut enfin remplacer les x, y par les rayons vecteurs et les azimuts des trois corps, ou les x, y par les distances mutuelles des corps et par les azimuts de ces distances; toutes ces substitutions conduisent à des systèmes canoniques de huit variables. Pour le démontrer, il me suffira de faire remarquer que la formule (12) indique l'existence d'une transformation orthogonale par laquelle les coordonnées relatives de trois corps dépendent des coordonnées rapportées au centre de gravité. La formule en question peut s'écrire

$$(118) \qquad \mathrm{m}^2 \sum \frac{1}{m_i} ((\mathrm{x}_i)) = \sum m_i ((x_i)),$$

où $\mathrm{m}^2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{\mathrm{M}}$. Il en résulte que la substitution a lieu entre les variables $\sqrt{m_i}\, x_i$ d'une part, et $\mathrm{m} \frac{\mathrm{x}_i}{\sqrt{m_i}}$ de l'autre, et que l'on peut remplacer mx, my, mz par mx, my, mz dans les formes quadratiques telles que la force vive, le mouvement aréolaire, les moments d'inertie, etc. L'équation (116) subsistera donc, si les lettres p, q représentent les dérivées $\frac{m}{\mathrm{m}} \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{x}}$, $\frac{m}{\mathrm{m}} \frac{d\mathrm{T}}{d\mathrm{y}}$, ou si nous remplaçons p, q par $\frac{m\mathrm{p}}{\mathrm{m}}$, $\frac{m\mathrm{q}}{\mathrm{m}}$, ce qui donne

$$(119) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\mathrm{T} &= \frac{1}{\mathrm{m}^2} \sum m (\mathrm{p}^2 + \mathrm{q}^2) \\ &\quad - \frac{\left(\sum m\mathrm{p}\right)^2 + \left(\sum m\mathrm{q}\right)^2}{\mathrm{m}^2 \mathrm{M}} + \mathrm{K}\Omega' - \frac{\Omega'}{\mathrm{K}} \left[\sum (\mathrm{qx} - \mathrm{py}) \right]^2. \end{aligned} \right.$$

On a ensuite

$$\frac{\mathrm{p}_1}{m_1} = x'_2 - y_2 \Omega' \cos I, \quad \frac{\mathrm{p}_2}{m_1} = - x'_1 + y_1 \Omega' \cos I, \ldots.$$

Pour trouver les variables conjuguées des rayons vecteurs et des azimuts, on n'a qu'à différentier l'expression (108) en tenant compte des équations de condition $\sum m\rho\cos u = 0, \sum m\rho \sin u = 0$; je me dispenserai de développer les calculs.

La substitution orthogonale indiquée par l'équation (118) est la suivante :

$$(120)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{x}_1 = x_2 - x_3 + \frac{m_1}{\mathrm{m}\mathrm{M}}\sum mx,\ldots \\ &\mathrm{M}x_1 = m_2\mathrm{x}_3 - m_3\mathrm{x}_2 + \mathrm{m}\sum \mathrm{x},\ldots \\ &x_2 - x_3 = \mathrm{x}_1 - \frac{m_1}{\mathrm{M}}\sum \mathrm{x},\ldots; \end{aligned}\right.$$

et, si nous considérons toujours les quantités $\sqrt{m}\,x$ et $\frac{\mathrm{m}\mathrm{x}}{\sqrt{m}}$ comme les variables de la transformation, les neuf coefficients sont

$$\frac{m_1}{\mathrm{M}},\quad \frac{\sqrt{m_1 m_2} + \sqrt{m_3 \mathrm{M}}}{\mathrm{M}},\quad \frac{\sqrt{m_3 m_1} - \sqrt{m_2 \mathrm{M}}}{\mathrm{M}},\ldots$$

Cette transformation porte d'ailleurs aussi sur la forme $dt^2\delta\mathrm{U}$, qui devient $\sum \frac{\mathrm{m}^2}{m} d^2\mathrm{x}\,\delta\mathrm{x}$, la somme devant s'étendre aux neuf coordonnées relatives x, y, z, et nous avons pour toutes ces coordonnées

$$\mathrm{m}^2\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = m\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{x}},$$

si dans la fonction des forces nous remplaçons les différences $x_2 - x_3, \ldots$ par les expressions $\mathrm{x}_1 - \frac{m_1}{\mathrm{M}}\sum \mathrm{x},\ldots$

FIN DU TOME CINQUIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME CINQUIÈME.

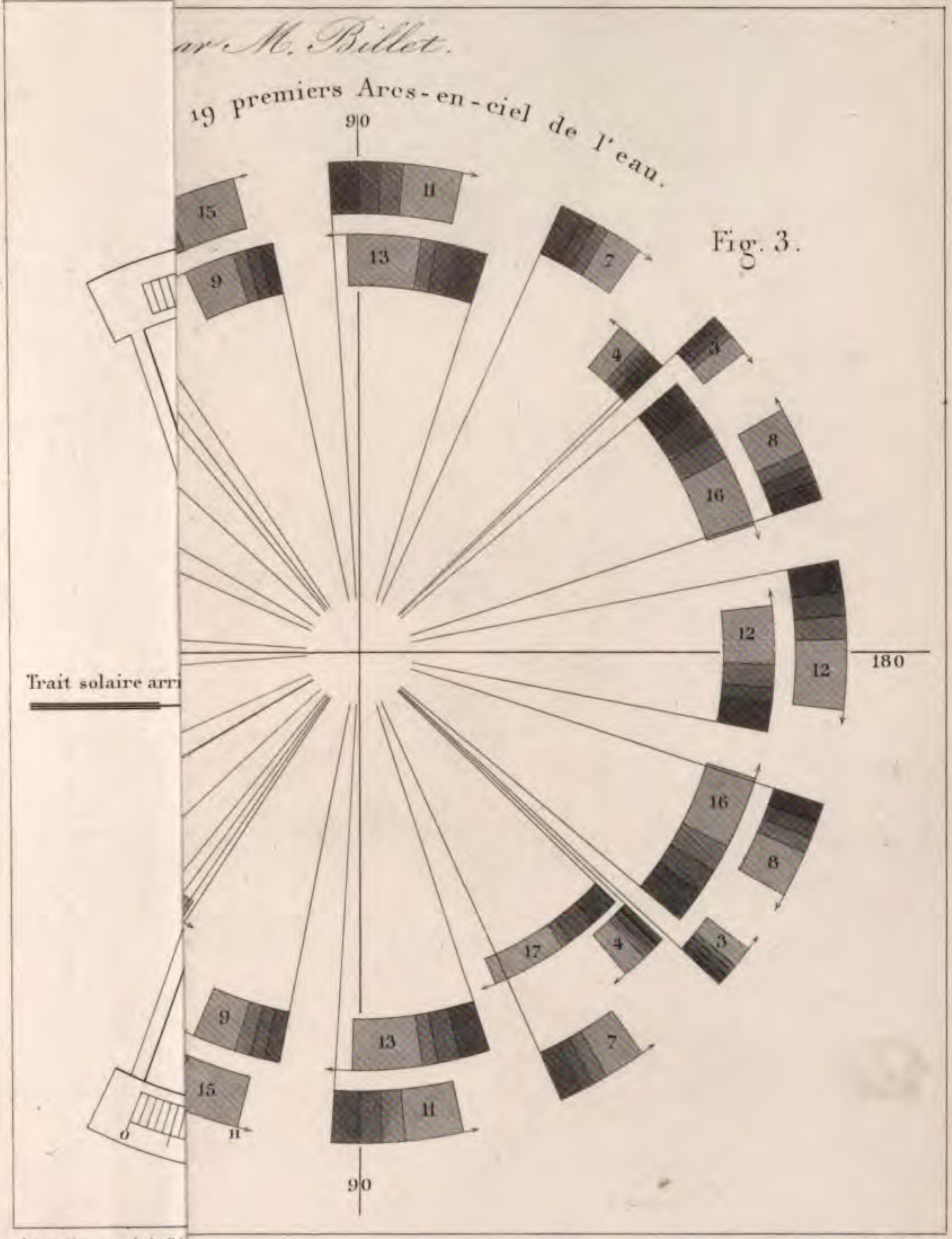
ERRATA.

Page 114, ligne 9, *au lieu de* triangle AIH, *lisez* triangle AIJ.

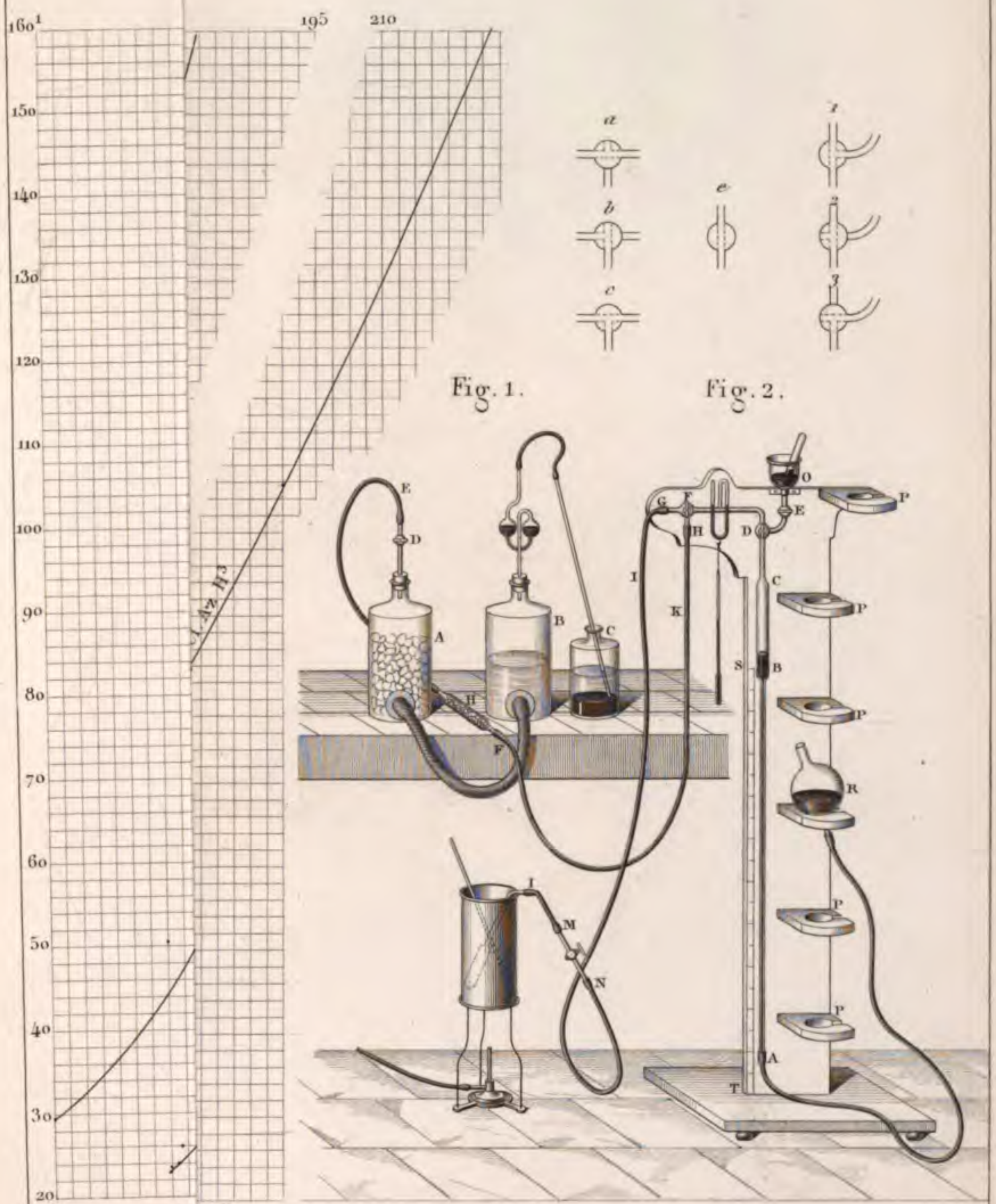
Page 117, ligne 23, *au lieu de* $2\alpha (= AA'') < AA''$, *lisez* $2\alpha (= AA') < AA''$.

Page 123, ligne 28, *au lieu de* $R' \gtreqless K \cos^2\varphi$, *lisez* $K' \gtreqless K \cos^2\varphi$.

PLANCHES.


ar M. Billet.
19 premiers Arcs-en-ciel de l'eau.
Fig. 3.
90
15
11
13
9
7
4
3
8
16
12
12
180
Trait solaire arr
16
8
17
4
3
9
13
7
15
11
0
11
90

M. F. Isambert.



Legay, imp. rue de la Büch

Dulos sc.

cP

MAY 9 1938